روجي غودمان
استاذ بكلية العلوم بباريس

دروس فى الجبر

ترجمة
مختار عبيد
بمشاركة
أبوبكر خالد سعدالله
يوسف عتيق

المجلد الثاني

ديوان المطبوعات الجامعية
الجزائر

دروس في الجبر

روجي غودمان
استاذ بكلية العلوم بباريس

دروس في الجبر

ترجمة
مختار عبيد
بمشاركة
بوبكر خالد سعدالله
يوسف عتيق

المجلد الثاني

دِيوَانُ المَطْبُوعَاتِ الجَامِعِيَّةِ - الجَزَائِرُ

Codification : 1 . 01 . 759

الفهرس

المجلد الاول

المجلد الثاني

كثيرات الحدود والمعادلات الجبرية

إن الهدف الرئيسي للطرق المعطاة في الفصول السابقة هو [illegible] جمل المعادلات الخطية. لكن الكل يعلم ان لدراسة [illegible] مماثلة، وصعوبة أكبر. وتكون الأطراف الأولى في هذه الجمل. عبارات حصية لحدود من المجاهيل المعتبرة. هذا وإن الدراسة لهذه الجمل تحتل مركزاً هاماً واساسياً في الجبر. كما أنها تؤدي للهندسة الجبرية التي تشكل حالياً إحدى الفروع الأكثر دراسة في الرياضيات.

إن الهدف من هذا الفصل هو تقديم مفاهيم جدّ أولية لكنها ضرورية في كل فروع الرياضيات، كالعلاقات الجبرية. وكثيرات الحدود. والكسور الناطقة، والمعادلات الجبرية... الخ.

وكما فعلنا بالفصول السابقة، فإننا حاولنا تقديم هذه المفاهيم بأكبر قدر ممكن من التعميم، بحيث نعرّف مثلاً كثيرات الحدود لمتحولات عديدة وبأمثال في حلقة تبديلية كيفية K.

والأمر، هنا أيضاً، ليس من أجل تعميم جذاب لكنه دون فائدة، إذ أن مفهوم كثير الحدود بأمثال في حلقة مختلفة عن حقل، ضروري إن أردنا استعمال التدريج بالنسبة لـn في دراسة كثير حدود لـn متحول.

(لأن كثيرات الحدود لـn متحول هي كثيرات حدود لمتحول واحد وبأمثال في حلقة كثيرات الحدود ذات $(n - 1)$ متحول، وهذه الأخيرة ليست حقل).

وهناك أيضاً أسباب أكثر جدية تجعلنا نضع المسألة في هذا الإطار العام، بالإضافة إلى أن اعتبار $K = \mathbf{R}$ لا يبسط عملياً تقديم هذه الدراسة.

(ويمكننا إذا إعتبرنا $K = R$ ؛ ألّا نفرّق بين «كثير الحدود» و«التابع المعرّف بكثير حدود» لكن لا يمكننا أن نثبت أن تابعاً معرفاً بكثير حدود ومنعدماً في كل نقطة ، له أمثال معدومة كلياً) .

نشير إلى أن الفصول «من 26 إلى 33» لا تتعلق إلا بالفصول «من 0 إلى 12» باستثناء ف 26 رقم 3 التي هي في الواقع غير موجهة إلى القراء المبتدئين .

ف 26. العلاقات الجبرية

1. كثيرات الحدود في عناصر حلقة

لتكن L حلقة تبديلية. من أجل K حلقة جزئية من L و B جزء من L، نعتبر الحلقات الجزئية من L التي تحتوي K و B في آن واحد. أن تقاطع كل هذه الحلقات الجزئية هي أيضاً حلقة جزئية تحتوي K و B، وهي أصغر حلقة جزئية من L تحتوي K و B. نقول عنها أنها **الحلقة الجزئية من L المولدة عن K و B** ونرمز لها بِ :

$$K[B]$$

لنعتبر مثلاً الحالة $B = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$، نستعمل عادة الرمز

$$K[x_1, \ldots, x_n]$$

لتعيين الحلقة الجزئية المولدة عن K والجماعة $\{x_i\}$. ومن الواضح أن هذه الحلقة الجزئية تحتوي كل حدّ في $x_1, \ldots, x_n$ أي كل عنصر من L من الشكل $x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n}$ حيث القوى r_i أعداد طبيعية غير معدومة. كما أنها تحتوي جداء كل حدّ من هذه الحدود مع عنصر من K، وبالتالي تحتوي أي مجموع لعدد منته من هذه الجداءات، أو بتعبير آخر، كل **كثير حدود في $x_1, \ldots, x_n$ وبأمثال في K**؛ ونعطي هذه التسمية لكل عنصر $y \in L$ يكتب على الشكل :

$$y = \sum_{r_1 \ldots r_n \geq 0} a_{r_1 \ldots r_n} x_1^{r_1} \ldots x_n^{r_n} \qquad (1)$$

حيث الأمثال $a_{r_1 \ldots r_n} \in K$ منعدمة شبه كلياً(*). ويمكن كتابة كثير الحدود هذا على الشكل :

(*) وهذا يعني (ف 11 رقم 5) أن الجمل $(r_1, \ldots, r_n)$ التي تحقق $a_{r_1 \ldots r_n} \neq 0$ لها عدد منتهي. وهذا الشرط ضروري إذا أردنا إعطاء معنى للطرف الأيمن من (1) بجعله عنصراً من L.

$$y = a + \sum_{1 \leq i \leq n} a_i x_i^i + \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i^i x_j^j + \sum_{1 \leq i,j,k \leq n} a_{ijk} x_i x_j x_k + \dots \quad (1^{bis})$$

حيث «الأمثال» a ، a_i ، a_{ij} ، a_{ijk} ، ... عناصر من K شبه منعدمة كلياً. يكفي، لنرى ذلك، أن نعتبر في (1) الحدود التي تحقق $r_1 + \dots + r_n = 0$ ثم تلك التي تحقق $r_1 + \dots + r_n = 1$ ثم تلك التي تحقق $r_1 + \dots + r_n = 2$ وهلم جر.

زيادة على كون الحلقة $K[x_1, \dots, x_n]$ تحتوي كل كثيرات الحدود (1)، فإن كل عناصر هذه الحلقة هي كثيرات حدود من هذا النوع، أو بعبارة أخرى، أن $K[x_1, \dots, x_n]$ هي مجموعة العناصر $y \in L$ التي تقبل الكتابة (1). بالفعل، بما أن جداء حدّين في الجماعة $\{x_i\}$ هو أيضاً كثير حدود خاص في هذه الجماعة فمن الواضح أن المجموعة L' لمؤلفة من كثيرات الحدود (1) هي حلقة جزئية من L، تحتوي K والجماعة $\{x_i\}$؛ وبما أنه لدينا أيضاً الإحتواء العكسي، حسب ما سبق، فإننا نحصل على $L' = K[x_1, \dots, x_n]$ كما أعلنّا.

إن الحالة الأكثر بساطة هي لما يكون $n = 1$، أي إذا كان $B = \{x\}$، وعندئذٍ فإن كثيرات الحدود في x بأمثال في K، وهي تؤلف الحلقة الجزئية $K[x]$ من L والمولدة عن K و x، تكون العناصر $y \in L$ التي تكتب على الشكل:

$$y = a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p$$

من أجل عدد طبيعي p وعناصر $a_1, \dots, a_p$ من K.

ملاحظة 1 - على الرغم من بعض الأفكار المسبقة فإنه ينبغي على القارئ المبتدئ أن يعتبر الحروف x و x_1، ...، x_n الواردة في تعريف كثيرات الحدود هي عناصر ثابتة في L وليست «متغيرة».

مثال 1 - لدينا $C = R[i]$ نظراً لأن كل عدد عقدي يكتب على الشكل $a + bi$ حيث a و b في R.

مثال 2 - نضع $K = \mathbf{Q}$ و $L = \mathbf{R}$ ، ونعتبر الحلقة الجزئية $K[x]$ حيث $x = \sqrt[3]{2}$ ، تكون القوى المتتالية لِـ x هي :

$$1, x, x^2, 2, 2x, 2x^2, 4, 4x, 4x^2, 8 \ldots$$

وبالتالي فإن الحلقة الجزئية $\mathbf{Q}[x]$ من الحلقة $\mathbf{R}$ تكون مجموعة الأعداد الحقيقية التي يمكن كتابتها على الشكل :

$$a + bx + cx^2; \qquad a, b, c \in \mathbf{Q}$$

مثال 3 - لتكن K حلقة تبديلية، و L حلقة تطبيقات K في K (ف 8 مثال 3) ؛ نعتبر K حلقة جزئية من L بالطريقة التالية : لكل عنصر $a \in K$ نعرّف تابعاً ثابتاً f بحيث $f(t) = a$ مهما كان $t \in K$. وليكن x تطبيقاً لِـ K في K معرّفاً بِـ $x(t) = t$ مهما كان $t \in K$ (x التطبيق المطابق لِـ K في K) . إن عناصر الحلقة الجزئية $K[x]$ من الحلقة L ، تسمى التوابع المعرّفة بكثيرات حدود على الحلقة K ؛ وهي بطبيعة الحال التطبيقات f لِـ K في K التي تحقق :

$$f(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_r t^r; \forall t \in K$$

من أجل عدد طبيعي r وعناصر $a_1, a_1, \ldots, a_r$ من K وسنعمم هذا المفهوم في ف 28 .

2.- العلاقات الجبرية

لتكن L حلقة تبديلية و K حلقة جزئية من L ، ولتكن $x_1, \ldots, x_n$ عناصر من L منتهية العدد . نسمي **علاقة جبرية بين** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ **وبأمثال في** K ، كل علاقة خطية بين وحيدات الحدود في $x_1, x_2, \ldots, x_n$ وبأمثال في K أو بعبارة أخرى ، كل جماعة $(a_{r_1, \ldots, r_n})_{r_1, r_1 \ldots r_n \geq 0}$ من عناصر K المنعدمة شبه كلياً بحيث يكون لدينا :

$$\sum_{r_1,\dots,r_n \geq 0} a_{r_1\dots r_n} x_1^{r_1} \dots x_n^{r_n} = 0 \qquad (2)$$

إذا كان من الضروري ، حتى تتحقق العلاقة (2)، أن تكون كل الأمثال $a_{r_1\dots r_n}$ منعدمة، فإننا نقول عن $x_1, \dots, x_n$ أنها **مستقلة جبرياً** على K ؛ وفي الحالات الأخرى، أي إذا وجدت علاقة (2) غير تافهة، فإننا نقول أن العناصر $x_1, \dots, x_n$ **مرتبطة جبرياً** على K .

كحالة خاصة نأخذ $n = 1$ ، أي عنصراً $x \in L$ وحيداً. إذا كان x مرتبطاً جبرياً على K ، أي إذا وجدت علاقة من الشكل :

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_p x^p = 0 \qquad (3)$$

من أجل عدد طبيعي p على الأقل وبأمثال $a_i \in K$ غير منعدمة كلياً، فإننا نقول أن x **جبري على** K ، وفي الحالة العكسية، أي في حالة عدم وجود العلاقة المذكورة، فإننا نقول أن x **متصاعداً على** K .

مثال 4 - إن العدد العقدي i جبري على **R** وأيضاً على **Q** إذ أنه يحقق العلاقة :

$$i^2 + 1 = 0$$

مثال 5 - لنأخذ $K = \mathbf{Q}$ و $\mathbf{L} = \mathbf{C}$ وليكن :

$$x = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}$$

الذي يكون بالتالي جبرياً على **Q**، إذ أن $x^3 = 2 - \sqrt{3}$ ومنها $(x^3 - 2)^2 = 3$ ، ويمكن كتابة هذه العلاقة على الشكل :

$$x^6 - 4x^3 + 1 = 0 .$$

نسمي أعداداً جبرية (ف 11، مثال 11) ، كل عناصر الحقل **C** الجبرية على حقل الأعداد الناطقة **Q**؛ أي العناصر $y \in \mathbf{C}$ التي تحقق على الأقل علاقة من الشكل :

$$a_0 + a_1 z + \dots + a_r z^r = 0$$

حيث العناصر a_i أعداد ناطقة غير معدومة كلياً (نستطيع إعتبارها صحيحة بعد توحيد المخارج والضرب بالمخرج المشترك).

مثال 6 - كل عدد عقدي غير جبري يسمى عدد متصاعد. وقد كان ليوفيل (Liouville) أول من أعطى أمثلة لهذه الأعداد سنة 1844. وفي سنة 1882 برهن لندمان Lindmann أن $\pi = 3,14159...$ عدد متصاعد، وهذه النتيجة تؤدي إلى إستحالة حل المسألة المعروفة بِـ «تربيع الدائرة» على عكس ما توقعه أكثر الرياضيين منذ العصور القديمة.

ويمكن أن نبرهن أن العدد $e = 2,71828...$ ، المستعمل في التحليل، هو أيضاً متصاعد (هرميت 1873).

مثال 7 - لتكن L حلقة كل تطبيقات $\mathbf{R}$ في $\mathbf{R}$ و K الحلقة الجزئية من L المؤلفة من التطبيقات المعرّفة بكثيرات حدود، أي الحلقة الجزئية من L المولدة عن التوابع الثابتة والتابع x المعرّف بِـ $x(t) = t$ مهما كان $t \in \mathbf{R}$ (مثال 3). نقول عن تابع $f \in L$ أنه جبري، إذا كانت x و f من L مرتبطتين جبرياً على الحلقة الجزئية $\mathbf{R}$ من الحلقة L ، أو بتعبير آخر إذا وجدت ثوابت a_{pq} شبه منعدمة كلياً بحيث يكون لدينا:

$$\sum_{p,q \geq 0} a_{pq}\, t^p\, f(t)^q = 0 \quad \text{؛ من أجل كل } t \in \mathbf{R} \qquad (4)$$

ومن الواضح مثلاً أن التابع f المعرّف بالعلاقة:

$$f(t) = \sqrt[3]{t^2 - 1}$$

جبري. وكل تابع غير جبري يسمى **متصاعد**؛ وهذا مثلاً حال التابع $f(t) = \sin t$ ؛ لإثبات ذلك نفترض أن هذا التابع يحقق العلاقة (4)؛ ونضع:

$$f_p(t) = \sum_{q \geq 0} a_{pq} \cdot \sin^q t \text{ ،}$$

عندئذٍ فإن العلاقة (4) تصبح:

$$\sum_p f_p(t) \cdot t^p = 0 \text{ ،}$$

وبما أن التابع sin دوري فنحصل أيضاً على

$$\sum_p f_p(t) \cdot (t + 2\pi n)^p = 0$$

من أجل كل عدد صحيح n ، وإذا إعتبرنا عنصراً $t \in \mathbf{R}$ فإن كثير الحدود $\sum f_p(t) \cdot x^q$ ينعدم من أجل عدد غير منته من قيم x ، وهذا يستلزم، كما سنرى فيما بعد (ف 32، رقم 4) أن أمثاله $f_p(t)$ منعدمة كلياً. وهكذا فإن العلاقة (4) تعطي :

$$\sum_q a_{pq} \cdot \sin^q t = 0$$

مهما كان $0 \le p$ و $t \in \mathbf{R}$ ؛ وبالتالي فإنه من أجل كل عدد طبيعي p ، ينعدم كثير الحدود $\sum a_{pq}\, x^q$ من أجل عدد غير منته من قيم x (وهي كل القيم $x = \sin t$ أي كل x بحيث $-1 \le x \le +1$) ، وهذا يعني أن كل أمثال كثير الحدود منعدمة، ونرى أخيراً أن العلاقة (4) تستلزم $a_{pq} = 0$ مهما كان p و q ؛ وهذا يثبت كما أعلنا، أن التابع $\sin t$ متصاعد.

3. حالة الحقول التبديلية

نبدأ ببرهان النتيجة التالية :

نظرية 1 - ليكن L حقلاً تبديلياً و K حقلاً جزئياً من L و x عنصراً من L . إن الخاصيات التالية متكافئة :

a) x جبري على K ،

b) أبعاد $K[x]$ منتهية بإعتباره فراغاً شعاعياً على K ؛

c) $K[x]$ حقل جزئي من L .

نفترض أن x جبري على K ؛ تكون لدينا عندئذٍ علاقة :

$$c_0 + c_1\, x + \dots + c_p\, x^p = 0$$

بأمثال $c_i \in K$ غير منعدمة كلياً. نستطيع أن نفترض $c_p \neq 0$ ، وبما أن K ، حقل، فنستنتج من العلاقة السابقة علاقة من الشكل:

$$x^p = a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1} \tag{5}$$

حيث الأمثال $a_i = -\frac{ci}{cp}$ تنتمي إلى K . وبصورة عامة سنستنتج أنه من أجل كل $n \geq 0$ ، يكون x^n عبارة خطية بأمثال في K لِـ $1, x, \dots, x^{p-1}$ التي تنتمي إلى $K[x]$. وبما أن ذلك بديهي من أجل $n = 0$ فيمكننا البرهان بالتدريج بالنسبة لِـ n ؛ نفترض إذن أنه توجد علاقة من الشكل:

$$x^{n-1} = d_0 + d_1 x + \dots + d_{p-1} x^{p-1}$$

بأمثال $d_i \in K$ ، وبالإعتماد على (5) فإننا نحصل على:

$$x^n = x \cdot x^{n-1}$$

$$= x \cdot x^{n-1} = d_0 x + \dots + d_{p-2} x^{p-1} + d_{p-1} x^p$$

$$= d_0 x + \dots + d_{p-2} x^{p-1} + d_{p-1}(a_0 + a_1 x + \dots + a_{p-1} x^{p-1})$$

وهذا يثبت طبعاً ما أعلنا. نرى إذن أنه إذا كان x جبرياً على K ، يوجد عدد طبيعي p بحيث تكون كل قوة لِـ x عبارة خطية، بأمثال في K ، للقوى:

$$1, x, \dots, x^{p-1} ؛$$

ويؤدي هذا طبعاً إلى أن العناصر السابقة، وعددها p ، تولد $K[x]$ بإعتباره فراغاً شعاعياً على K ، مما يثبت أن القول a) من النص يستلزم القول b).

لنبرهن الآن أن b) يستلزم c)، ونضع $F = K[x]$. من أجل عنصر غير منعدم $a \in F$ ، نعتبر التطبيق

$$f: F \to F$$

المعرّف بِـ:

$$f(u) = au \text{ ، من أجل كل } u \in F ؛$$

وإذا نظرنا إلى F كفراغ شعاعي على K فمن الواضح أن f تماثل داخلي لِـ F . وتتألف نواة f من العناصر $u \in F$ التي تحقق $au = 0$ ؛ وبما أن F

حلقة تامة (بإعتبار أنها حلقة جزئية من الحقل L) ، وبما أن $a \neq 0$ فنرى أن $\text{Ker}(f)$ تقتصر على العنصر صفر ، وبالتالي يكون f متبايناً .

فإذا كانت أبعاد F منتهية فإن f أيضاً غامر (ف 19 نتيجة 1 من النظرية 13) ، وهذا يعني بصفة خاصة أنه يوجد $u \in F$ بحيث $au = 1$ ؛ ونرى من ذلك أن كل عنصر من F غير منعدم يكون قابلاً للقلب في F الذي يكون بالتالي حقلاً جزئياً من L .

بقي برهان أن c) يستلزم a) . ولأجل ذلك نلاحظ أنه إذا كان $K[x]$ حقلاً جزئياً من L ، فإن المقلوب (في L) لكل عنصر غير منعدم من $K[x]$ يكون في $K[x]$ ، ويحتوي هذا الأخير بصفة خاصة مقلوب x ، وبالتالي نحصل على علاقة من الشكل :

$$x^{-1} = a_0 + a_1 x + \dots + a_r x^r$$

بأمثال في K . وبما أن العلاقة المذكورة تكتب أيضاً على الشكل

$$-1 + a_0 x + \dots + a_r x^{r+1} = 0$$

فنرى أن x جبري على K ، وهذا ينهي البرهان .

مثال 8 - نأخذ $K = \mathbf{Q}$ و $L = \mathbf{C}$ ، وليكن x عدداً جبرياً أي عنصراً من $\mathbf{C}$ يحقق علاقة من الشكل :

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0$$

بأمثال $a_0, \dots, a_n$ ناطقة وغير معدومة كلياً (مثال 5) ؛ عندئذ نرى أن مجموعة الأعداد العقدية التي يمكن كتابتها على الشكل :

$$c_0 + c_1 x + \dots + c_{n-1} x^{n-1}$$

حيث $c_0 \dots c_{n-1}$ أمثال ناطقة، تؤلف حقلاً جزئياً من $\mathbf{C}$.

يمكن مقارنة هذه النتيجة مع مثال 2 من ف 8 .

نظرية 2 - ليكن L حقلاً تبديلياً و K حقلاً جزئياً من L و $\overline{K}$ مجموعة عناصر L التي تكون جبرية على K . إن $\overline{K}$ حقل جزئي من L .

نفترض x و y جبريين على K ؛ يوجد عددان طبيعيان p و q بحيث تكون كل قوة لِـ x (y بالتوالي) عبارة خطية بأمثال في K للقوى

$$1, x, \ldots, x^{p-1} \ (\text{بالتوالي}\ 1, y, \ldots y^{q-1})$$

وينتج عن ذلك، بعملية الضرب، أن كل وحيد حدود $x^r y^s$ يكون عبارة خطية، بأمثال في K ، لوحيدات الحدود وعددها $p \cdot q$ ،

$$x^i y^j \qquad (0 \leq i \leq p-1, 0 \leq j \leq q-1) \ ؛$$

إن الحلقة الجزئية $K[x, y]$ من L ، لها أبعاد منتهية على K . ومن أجل كل $z \in K[x, y]$ فإن الحلقة الجزئية $K[z]$ ، تكون محتواة في $K[x, y]$ وبالتالي منتهية الأبعاد على K ؛ ومن هذا نرى أن كل عناصر $K[x, y]$ جبرية على K وبصفة خاصة $x - y$ و xy جبريين على K وهذا يكفي لتكون $\overline{K}$ حلقة جزئية من L .

لإنهاء البرهان، بقي أن نثبت أنه إذا كان $x \neq 0$ جبرياً على K فإن x^{-1} يكون كذلك، فإذا كان x يحقق علاقة:

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0$$

بأمثال في K ، فمن الواضح أن $y = x^{-1}$ يحقق:

$$a_n + \ldots + a_1 y^{n-1} + a_0 y^n = 0$$

وهذا يكمل البرهان.

مثال 9 - إن مجموعة الأعداد الجبرية هي حقل جزئي من **C** .

يمكن للقارئ أن يجد معلومات عن هذه المسائل التي تلعب دوراً هاماً في الجبر «العليا»، في تمارين هذه الفقرة والفقرات القادمة بالإضافة إلى بعض الكتب المذكورة بالمراجع (Van der Waiden, Samuel-Zariski, Lang) .

ف 27. حلقة كثيرات الحدود

لتكن K حلقة تبديلية و n عدداً صحيحاً موجباً . نهدف في هذا الفصل إلى إنشاء حلقة تبديلية L وعناصر $X_1, X_2, ..., X_n$ من L بحيث تكون الشروط التالية محققة :

(ل 1) K حلقة جزئية من L ؛

(ل 2) العناصر $X_1, X_2, ..., X_n$ مستقلة جبرياً على K ؛

(ل 3) L مولدة عن K و $X_1, X_2, ..., X_n$ ؛

قبل أن ندرس الحالة العامة نبدأ بحل المسألة لما يكون $n = 1$: المطلوب في هذا الحالة هو إنشاء حلقة تبديليلة L تحتوي K وإيجاد عنصراً $X \in L$ متصاعداً على K (ف 26 رقم 2) بحيث يكون لدينا $L = K[X]$.

1. تمهيد الحالة متغير واحد

لنفترض أننا أنشأنا حلقة تبديلية L تحتوي الحلقة K ، وأننا وجدنا $X \in L$ متصاعداً على K بحيث $L = K[X]$. إن كل $f \in L$ يكتب ، وبصورة وحيدة ، على الشكل :

$$f = a_0 + a_1 X + ... + a_n X^n + ... \qquad (1)$$

حيث العناصر $a_n \in K$ منعدمة باستثناء عدد منته منها . (حيث في بعض

الأحيان أن هذه العناصر شبه منعدمة كلياً) لإثبات ذلك، وإعتماداً على الشرط $L = K[X]$ نرى أن :

$$1, X, ..., X^n, ...$$

تولد L، إذا نظرنا إلى هذا الأخير كمقياس على K، وبما أن X متصاعد على K فإن الجماعة $1, X, ..., X^n, ...$ مستقلة خطياً على K (أو بتعبير آخر إن الجماعة تشكل أساساً لِـ L على K حسب مفهوم ف 11 رقم 5) . ومن الواضح عكسياً أن كل متتالية $(a_n)_{n \geq 0}$ من عناصر K شبه المنعدمة كلياً تعرف، بواسطة الدستور (1)، عنصراً من L .

ليكن :

$$f = a_0 + a_1 X + ... \quad , \quad g = b_0 + b_1 X + ...$$

عنصرين من L، ونضع :

$$f + g = c_0 + c_1 X + ...$$

$$fg = d_0 + d_1 X + ... \text{؛}$$

من الواضح أن :

$$c_n = a_n + b_n \qquad (2)$$

من أجل كل $n \geq 0$. لحساب fg نقوم بضرب كل حد $a_p X^p$ من f مع كل حد $b_q X^q$ من g ثم نجمع النتائج الحاصلة؛ وهكذا نرى أن :

$$d_n = \sum_{p+q=n} a_p b_q = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + ... + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n \qquad (3)$$

إن أهمية الدستورين (2) و (3) تكمن في كونهما يسمحان بحساب $f + g$ و fg دون إستخدام X؛ وسنعتمد عليهما كنقطة إنطلاق لإنشاء الحلقة $K[X]$.

2. كثيرات الحدود ذات متغير واحد

سنعرف الآن، إنطلاقاً من K، حلقة L تحقق الشروط المفروضة (سنثبت النقطة الأخيرة في الفقرة القادمة، أما في هذه الفقرة فإننا سنعرّف عناصر L والعمليات الجبرية فيها) . L هي بالتعريف مجموعة المتتاليات :

$$f = (a_n)_{n \geq 0} = (a_0, a_1, \ldots)$$

من عناصر K شبه المنعدمة كلياً؛ نسمي كل متتالية من هذا الصنف **كثير حدود لمتغير واحد وبأمثال في** K، كما أن العناصر a_n تسمى **أمثال** كثير الحدود f .

ليكن $f = (a_n)_{n \geq 0}$ كثير حدود أمثاله في K، إن أكبر عدد طبيعي $d \geq 0$ بحيث $a_d \neq 0$ يسمى **درجة** f؛ وإذا كانت $a_n = 0$ من أجل كل $n \geq 0$ فنقول أن درجة f تساوي $-\infty$ [لا تعني هذه الإشارة عدداً عاديًا ما وإنما هي كائن رياضي جديد يمكن إستعماله في الحالتين التاليتين :

بالتعريف، إذا كان $n \in \mathbf{Z}$ أو إذا كان $n = -\infty$ فإن $-\infty + n = -\infty$ وإصطلاحاً إذا كان $n \in \mathbf{Z}$ أو إذا كان $n = -\infty$ فإن $n \geq -\infty$ ؛

كل علاقة أخرى تدخل فيها إشارة $-\infty$، مثلاً العبارة $(-\infty) - \infty - \infty$، تعتبر خالية من المعنى] .

نعيّن درجة كثير حدود f بالرمز : $d^\circ f$.

نعرف فيما يلي عملية جمع وعملية ضرب في مجموعة كثيرات الحدود لمتغير واحد ذات أمثال في K . إذا كان :

$$f = (a_n)_{n \geq 0} \quad ; \quad g = (b_n)_{n \geq 0}$$

كثيري حدود، فإن كثيري الحدود:

$$f + g = (c_n)_{n \geq 0} \quad ; \quad fg = (d_n)_{n \geq 0}$$

يحققان بالتعريف العلاقات :

$$c_n = a_n + b_n \tag{2}$$

$$d_n = a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \dots + a_1 b_{n-1} + a_0 b_n = \sum_{r+s=n} a_r b_s \tag{3}$$

لتبرير التعريفين السابقين ينبغي أن نثبت أن المتتاليتين (c_n) و (d_n) المعرفتين في (2) و (3) هما فعلاً كثيرا حدود أي أنه من أجل n كبير بقدر كافٍ فإن $c_n = d_n = 0$. نفترض إذن أن $p = d°(f)$ وأن $q = d°(g)$ ؛ ونرى أنه إذا كان $n > \text{Max}(p, q)$ فيكون لدينا $a_n = b_n = 0$ وبالتالي $c_n = 0$ وهذا يعني أن $f + g$ هو كثير حدود بحيث :

$$d°(f + g) \leq \text{Max}(d°(f), d°(g)) \tag{4}$$

نفترض من جهة أخرى أن $n > p + q$ ؛ عندئذٍ إذا إعتبرنا الحد العام $a_n b_s$ من المجموع (3) فيكون لدينا حتماً $r > p$ (وبالتالي $a_r = 0$) أو $s > q$ (وبالتالي $b_s = 0$) بحيث يكون $d_n = 0$ في الحالتين ، وهذا يعني أن fg هو كثير حدود يحقق :

$$d°(f \cdot g) \leq d°(f) + d°(g) \tag{5}$$

ينبغي أن نتحقق الآن من أن المجموعة L ، مزودة بقانوني التشكيل المعرّفين آنفاً ، لها بنية حلقة تبديلية . سنكتفي هنا بإثبات تجميعية قانون الضرب ، ونترك للقارئ أن يتحقق بنفسه من صحة الخواص الأخرى بطرق تشابه ف 9 رقم 3 .

لتكن إذن :

$$f = (a_n)_{n \geq 0}, \quad g = (b_n)_{n \geq 0}, \quad h = (c_n)_{n \geq 0}$$

ثلاث كثيرات حدود ذات أمثال في K . نضع :

$$fg = (u_n)_{n \geq 0} \quad , \quad gh = (v_n)_{n \geq 0}$$

$$u_n c_0 + \dots + u_0 c_n \tag{6}$$

$$a_n v_0 + \dots + a_0 v_n \tag{7}$$

وهكذا فإن المسألة ترجع إلى إثبات أن العبارة (6) تساوي العبارة (7) من أجل كل n . لكن u_p تساوي حاصل جمع الجداءات $a_i b_j$ بحيث $i + j = p$

وبالتالي فإن (6) تكون حاصل جمع العبارات $(a_i\, b_j)c_k$ حيث $(i+j)+k=n$ ؛ ومن جهة أخرى فإن v_q هي حاصل جمع الجداءات $b_j\, c_k$ حيث $j+k=q$ وبالتالي تكون (7) حاصل جمع العبارات $a_i(b_j\, c_k)$ حيث $i+(j+k)=n$ وتنتج عن ذلك المساواة بين (6) و (7) .

نرى من ناحية أخرى أن العنصرين 0 و 1 في L يعرّفان بالعلاقتين :

$$0 = (0, 0, ...)$$

$$1 = (1, 0, 0 ...)$$

3. الرموز الشكلية لـكثيرات الحدود

لنرى الآن أنه بإمكاننا إعتبار K حلقة جزئية من L . نبدأ بتعريف تطبيقاً :

$$j : K \to L \text{ ،}$$

بالدستور :

$$j(a) = (a, 0, 0, ...)$$

من أجل كل $a \in K$. من الواضح أن j متباين ، ويمكننا بسهولة إثبات :

$$j(a+b) = j(a) + j(b)$$

$$j(ab) = j(a)\, j(b)$$

$$j(0) = 0$$

$$j(1) = 1$$

بواسطة الدستورين (2) و (3) .

وينتج عن ذلك أنه يوجد تشاكل لِـ K في جزء من L (أو بصورة أدق في حلقة جزئية من L) وبالتالي فإن القيام بحساب جبري لعناصر من K يكافئ القيام بنفس الحساب لصور هذه العناصر بالتطبيق j في الحلقة L . [illegible] a في K مع صورته في L بالتطبيق المذكور . وبعبارة أخرى فإننا سنكتب إبتداء من الآن :

$$a = (a, 0, 0, ...) \quad \text{من أجل كل} \quad a \in K \tag{8}$$

إن عناصر L التي نحصل عليها بهذه الطريقة هي كثيرات حدود بدرجة 0 وذات أمثال في K (باستثناء عنصر L الموافق للعنصر $0 \in K$، تكون درجته $-\infty$). إن عناصر L هذه تسمى عادة **ثوابت**.

ملاحظة 1 - إن «الثابت» كما عرّفناه الآن، مفهوم يتعلق بالحلقة الأساسية K: انه كثير حدود منعدم أو بدرجة 0 وذي أمثال في K، أو، ان أردنا، هو عنصر من K (إذا نظرنا اليه ككثير حدود ذي أمثال من K). سنرى في الفصل القادم تفسيراً حدسياً لهذا الإصطلاح.

بما أن K حلقة جزئية من L فإنه بإمكاننا إعتبار L مقياساً على K؛ ومن أجل $a \in K$ و $f \in L$ فإن جدائهما يكون جداء f مع العنصر (8) في L. ونحصل بسهولة، إعتماداً على (3):

$$a \cdot (b_0, b_1, \dots) = (a\, b_0, a\, b_1, \dots) \tag{9}$$

لنعتبر الآن عنصراً من L متصاعداً على K ونضع:

$$X = (0, 1, 0, 0, \dots) \tag{10}$$

باستخدام الدستور (3) نحصل بسهولة على:

$$X^2 = (0, 0, 1, 0, 0, \dots)$$
$$X^3 = (0, 0, 0, 1, 0, \dots)$$

إلى آخره، وبالتالي، من أجل $a_0, a_1, \dots$ عناصر من K وإعتماداً على (9) فإننا نحصل على الدساتير:

$$a_0 = (a_0, 0, 0, \dots)$$
$$a_1\, X = (0, a_1, 0, 0, \dots)$$
$$a_2\, X^2 = (0, 0, a_2, 0, 0, \dots)$$
$$a_3\, X^3 = (0, 0, 0, a_3, 0, 0, \dots)$$

إلى آخره. وإذا كانت الجماعة $(a_i)_{i \geq 0}$ شبه منعدمة فيكون لدينا:

$$a_0 + a_1\, X + a_2\, X^2 + \dots = (a_0, a_1, \dots) \tag{11}$$

من هذه النتيجة بالإضافة إلى العلاقة:

$$0 = (0, 0, 0, ...)$$

نرى أن الطرف الأيسر من (11) لا يكون منعدماً إلاّ إذا كان لدينا $0 = ... = a_0 = a_1 = a_2$ ؛ وبالتالي فإن X متصاعداً على K .

ومن جهة أخرى فإن (11) تثبت أن كل عنصر في L هو كثير حدود متعلق بِـ X وذي أمثال في K (بمفهوم ف 26 رقم 1) أي أن :

$$L = K[X]$$

وبهذا نرى أن L يحقق الشروط المذكورة في بداية هذا الفصل . ونقول عن L انها **حلقة كثيرات الحدود لمجهول واحد ذات أمثال في** K ، ولتعيين عنصر من L :

$$f = (a_0, a_1, ...)$$

فإننا نستخدم الكتابة :

$$f = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + ... \quad (12)$$

التي تبررها العلاقة (11) . بتعبير أدق ، يمكن للقارئ ، إبتداء الآن ، أن يهمل ما إعتبرناه في الفقرة السابقة لتعريف كثيرات الحدود ؛ وفي كل ما يلي (وفي كل ما يمكن القيام به في الرياضيات بواسطة كثيرات الحدود) لن نعتبر إلاّ الشروط ($\mathcal{T}$ 1) ($\mathcal{T}$ 2) ($\mathcal{T}$ 3) المذكورة آنفاً ، وبتعبير آخر : إن كثير الحدود لمجهول واحد ذي أمثال في K هو كائن يمكن كتابته على الشكل (12) بطريقة وحيدة حيث الأمثال $a_n \in K$ شبه منعدمة كلياً ؛ ونقوم بعمليات الحساب على كثيرات الحدود معتبرينها عناصراً من حلقة تبديلية ، أي بإستعمال قواعد الحساب «البديهية» .

ملاحظة 2 – قد يتسائل القارئ عن السبب الذي جعلنا لا نعرّف كثير الحدود مباشرة بواسطة العبارة (12) حيث نقوم بعمليات الحساب ملتزمين القواعد «البديهية» . السبب هو إننا لو فعلنا ذلك فلا نستطيع إعطاء معنى رياضياً دقيقاً للحرف X الموجود في (12) بحيث أننا في الحقيقة لا نحصل على تعريف .

ملاحظة 3 - على الرغم من عادات ما زالت جارية في بعض الأحيان، فإنه ينبغي ألاّ يُعتبر X ممثلاً لـ «عنصر متحول» في K ؛ إن الحرف X يعني كثيرا الحدود الخاص (10) الذي عرّف بأقل ما يمكن من عدم التعيين ومن الغموض . . .

إن الفكرة التي تعتبر X عنصراً متغيراً في K ، أتت من عادة عدم التفريق بين كثير حدود ذي أمثال في K وتابع معرّف بكثير حدود على الحلقة K (ف 26 رقم 3) ؛ وسنناقش في الفصل القادم العلاقات بين المفهومين .

من البديهي أنه يمكن تعريف كثير الحدود (10) بواسطة حرف آخر بدلاً عن X (عادة نستخدم الحروف $(Y, Z, T, \ldots)$ بشرط ألاّ يكون الحرف المختار قد استخدم لغرض آخر .

4. كثيرات الحدود لأكثر من متحول

هدفنا الآن هو إنشاء حلاً للمسألة المطروحة في بداية هذا الفصل وسنتبع طريقة التدريج بالنسبة للعدد الطبيعي n .

لتكن K' حلقة تبديلية تحتوي K كحلقة جزئية، ومولدة عن K وعن $(n-1)$ عنصراً $(X_1, X_2, \ldots, X_{n-1})$ مستقلاً جبرياً على K . نرمز بـ L لحلقة كثيرات الحدود لمتحول واحد وبأمثال في K' ونرمز بـ X_n للمتحول هذا . يكون لدينا :

$$L = K'[X_n] = K[X_1, X_2, \ldots, X_{n-1}][X_n]$$

هدفنا هو إثبات أن L يحقق الشروط $(J\,1)$ $(J\,2)$ $(J\,3)$.

بما أن K حلقة جزئية من K' التي هي بدورها حلقة جزئية من L فإن $(J\,1)$ بديهية .

ومن جهة أخرى . إذا كانت L' الحلقة الجزئية من L والمولدة عن K

وعن $\{X_1, X_2, ..., X_n\}$ فإنها تحتوي K' لأنها تحتوي K و $\{X_1 X_2 ... X_{n-1}\}$؛ وبما أن L' تحتوي K' و X_n فإن $L = L'$ وهذا هو الشرط $(3 J)$.

لنعتبر أخيراً معادلة من النوع:

$$\sum a_{r_1 ... r_n} X_1^{F_1} X_2^{F_2} ... X_n^{F_n} = 0$$

حيث $a_{r_1 ... r_m}$ عناصر من K شبه منعدمة، ولندخل العناصر:

$$f_s = \sum a_{r_1, ..., r_{n-1}\, s} X_1^{r_1} ... X_{n-1}^{r_{n-1}}$$

التي تنتمي إلى K'. إن المعادلة المذكورة تصبح:

$$\sum_s f_s X_n^s = 0$$

وبما أن X_n متصاعد على K'، فإن $f_s = 0$ من أجل كل $s \leq 0$. ونظراً لكون $X_1 X_2 ... X_{n-1}$ مستقلة جبرياً على K فإنه يكون لدينا:

$$a_{r_1, ... r_{n-1}}\, s = 0 \quad \text{من أجل كل} \quad s, r_{n-1}, ..., r_1$$

وهذا يثبت $(2 J)$.

أن الحلقة:

$$L = K[X_1, ..., X_{n-1}][X_n] = K[X_1, ..., X_n]$$

التي أنشأناها، تسمى حلقة كثيرات الحدود لِـ n متحول وذات أمثال في K؛ وكل كثير حدود من هذه الحلقة يكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$f = \sum a_{r_1 ... r_n} X_1^{r_1} ... X_n^{r_n} \qquad (13)$$

حيث الأمثال $a_{r_1 ... r_n}$ تنتمي إلى K وشبه منعدمة كلياً.

إذا كان مثلاً $n = 2$ فنرمز عادة للمتحولين X_1 و X_2 بِـ X و Y.

وإذا كان f كثير حدود لمتحولين إثنين وبأمثال في K فإنه يكتب على الشكل:

$$f = \sum a_{rs} X^r Y^s$$

حيث الأمثال $a_{rs} \in K$ وشبه منعدمة كلياً، ويؤخذ المجموع من أجل كل الأزواج (r, s) من الأعداد الطبيعية. وإذا جمعنا الحدود التي تأخذ من أجلها $r + s$ قيمة معينة فإننا نرى أن f يقبل أيضاً كتابة على الشكل:

$$f = a_{00} + (a_{10} X + a_{01} Y) + (a_{20} X^2 + a_{11} XY + a_{02} Y^2) +$$
$$+ (a_{30} X^3 + a_{21} X^2 Y + a_{12} XY^2 + a_{03} Y^3) + \dots$$

حيث لا يوجد سوى عدد منته من الحدود الغير معدومة.

وبطريقة مماثلة إذا كان $n = 3$، وإذا رمزنا للمتحولات بـX و Y و Z فإن كل كثير حدود بأمثال في K ولثلاث متحولات، يأخذ العبارة التالية:

$$f = \sum_{i,j,k \geq 0} a_{ijk} X^i Y^j Z^k$$

حيث $a_{ijk} \in K$ شبه منعدمة كلياً، ويكتب أيضاً على الشكل:

$$f = a_{000} + (a_{100} X + a_{010} Y + a_{001} Z) +$$

$$+ (a_{200} X^2 + a_{020} Y^2 + a_{002} Z^2 + a_{011} YZ + a_{101} ZX + a_{110} XY) + \dots$$

من الواضح أنه ليس من الضروري إستعمال الرموز السابقة لتعيين أمثال كثير حدود. إذ أنه في الرياضيات يمكن لكل شخص إستخدام الرموز التي يختارها شريطة أن تكون غير متناقضة، فيمكن مثلاً، عوض إستعمال أدلة مختلفة. كتابة كثير الحدود بإستخدام حروفاً مختلفة؛ فيمكن مثلاً كتابة كثير حدود لمتحولين إثنين على الصورة:

$$f = a + bX + cY + dX^2 + e XY + f Y^2 + gX^3 + \dots$$

5. الدرجات الجزئية والدرجة التامة

إذا جمعنا في الدستور (13) كل الحدود التي تأخذ فيها r_i قيمة معينة فإننا نلاحظ أنه يمكن إعتبار f كثير حدود لمتحول واحد X_i وبأمثال في الحلقة:

$$K_i \doteq K[X_1, \dots, X_{i-1}, X_{i+1}, \dots, X_n].$$

وإذا اعتبرنا f عنصراً من الحلقة $K_i[X_i]$ ، فإنه يمكن تعريف درجته التي تسمى درجة f بالنسبة لِـ X_i . ويكون تعريفها كما يلي : لنكتب :

$$f = \sum_{n \geq 0} u_n \, X_i^n$$

حيث u_i كثيرات حدود للمتحولات X_j مع $j \neq i$ وبأمثال في K . وبعد ذلك تكون درجة f بالنسبة لِـ X_i أكبر عدد طبيعي n بحيث $u_n \neq 0$ أو الإشـارة $-\infty$ إذا كانت كل العناصر u_n منعدمة (أي $f = 0$) .

ونسمي من جهة أخرى **درجة f التامة** ، أو **درجة f** ، أكبر عدد طبيعي d بحيث :

$$d = r_1 + r_2 + \dots + r_n$$

من أجل قيم $r_1, r_2, \dots, r_n$ تحقق :

$$a_{r_1 \, r_2 \dots r_n} \neq 0$$

كما أنه يمكن تعريف **الدرجة التالية** كما يلي ؛ نقول عن كثير حدود بأمثال في K ، أنه **متجانس بدرجة** d ، إذا كان كل حد من حدوده الغير منعدمة له الدرجة d .

وإذا جمعنا في (13) الحدود التي تأخذ فيها $r_1 + \dots + r_n$ قيمة معينة ، فنرى أن كل كثير حدود f بأمثال في K يكتب بطريقة وحيدة على الشكل :

$$f = f_0 + f_1 + \dots + f_r + \dots$$

حيث f_r متجانس بدرجة r من أجل كل الأعداد $r \geq 0$ شبه المنعدمة كلياً . وبذلك فتكون درجة f التامة أكبر عدد طبيعي d حيث $f_d \neq 0$ (ونعطي إصطلاحاً الدرجة التامة $-\infty$ لـكثير الحدود المنعدم) .

إننا نعين درجة f التامة بالرمز $d°f$ كما هو الحال بالنسبة لمتحول واحد ؛ ولدينا :

$$d°(f + g) \leq \text{Max}\,[d°(f), d°(g)] \tag{4}$$

$$d°(fg) \leq d°f + d°g \tag{5}$$

بالفعل . إذا كان $d^\circ f = p$ و $d^\circ g = q$ فإنه يكون لدينا :

$$f = f_0 + \dots + f_p$$
$$g = g_0 + \dots + g_q$$

(نرمز عادة بـ u_r لمجموع الحدود ذات درجة تامة r في كثير الحدود u) . وبجمع العلاقتين السابقتين نرى أن $f + g$ ليس له حدود بدرجة أعلى من $\mathrm{Max}(p, q)$. ومن جهة أخرى ، فإن fg هو مجموع الجداءات $f_i g_i$ ، ومن الواضح أن $f_i g_j$ متجانس بدرجة $i + j$ ومنه فإن الحدود التي تدخل فعلاً في كتابة fg تكون درجتها التامة لا تتعدى $p + q$ وهذا يتم البرهان .

6. كثيرات الحدود بأمثال في حلقة تامة

نهدف إلى برهان النتيجة التالية :

نظرية 1 - لتكن K حلقة تامة تبديلية ؛ من أجل كل عدد طبيعي n ، فإن $K[X_1, \dots, X_n]$ حلقة تامة . ومن جهة أخرى ، فمن أجل كل f و g في $K[X_1, \dots, X_n]$ ، يكون لدينا :

$$d^\circ f \cdot g = d^\circ f + d^\circ g$$

من أجل برهان أن $K[X_1, \dots, X_n]$ حلقة تامة ، نستعمل العلاقة :

$$K[X_1, \dots, X_n] = K[X_1, \dots, X_{n-1}][X_n]$$

التي تمكننا ، بواسطة التدريج(*)، من إرجاع المسألة إلى الحالة $n = 1$.

ليكن إذن كثيري حدود لمتحول واحد وبأمثال في K :

(*) [illegible] كثيرات حدود بمتحولات متعددة ؛ ولكن ينبغي [illegible] نفس هذا ، أن نعتبر كثيرات الحدود بأمثال في حلقة ما ، إذ أن $K[X_1, \dots, X_n]$ ليس حقل حتى ولو كان K حقلاً .

$$f = a_0 + \ldots + a_p X^p ; a_p \neq 0$$
$$g = b_0 + \ldots + b_q X^q ; b_q \neq 0$$

ومن الواضح أن fg يقبل حداً وحيداً بدرجة $p+q$ ألا وهو :

$$a_p \, b_q \, X^{p+q}$$

وبما أن K تامة فإن $a_p \, b_q \neq 0$ ومنه فإن $f \cdot g \neq 0$ وهذا يثبت النص الأول من النظرية .

لنبرهن النص الثاني (في الحالة العامة لتحولات متعددة) . ونكتب :

$$f = f_0 + \ldots + f_p ; f_p \neq 0$$
$$g = g_0 + \ldots + g_q ; g_q \neq 0$$

من الواضح أن $f_p \, g_q$، هو الجزء المتجانس بدرجة $p+q$ من $f \cdot g$؛ وبما أن $K[X_1, \ldots, X_n]$ حلقة تامة ، كما رأينا آنفاً ، فإن $f_p \, g_q \neq 0$. إذن درجة f التامة هي $p+q$ وهذا هو المطلوب .

ملاحظة 4 - لم نبرهن في الحقيقة

$$d^\circ fg = d^\circ f + d^\circ g$$

إلا في الحالة $f \neq 0$ و $g \neq 0$. فإذا كان مثلاً $f = 0$ نرى أن $-\infty = -\infty + d^\circ g$ تستنتج من الإصطلاحات الخاصة بـ $-\infty$ التي أخذناها بالفقرة رقم 2 .

ملاحظة 5 - إذا كانت K غير تامة فمن الواضح أن $K(X_1, \ldots, X_n]$ لا يمكن أن تكون تامة . وبالإضافة إلى ذلك ، يمكن للعلاقة $d^\circ fg = d^\circ f + d^\circ g$ الا تكون صحيحة في هذه الحالة : يمكن أن نختار a و b في K غير معدومين بحيث $ab = 0$ ونعتبر :

$$g = bX \quad \text{و} \quad f = aX$$

ويكون لدينا :

$$d^\circ fg = -\infty$$

$$d^\circ(f) + d^\circ(g) = 2$$

ف 28. التوابع المعرفة بكثيرات حدود

1. قيم كثير حدود

لتكن حلقة تبديلية K وليكن :

$$f = \sum a_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} \tag{1}$$

كثير حدود لِـ n متحول وبأمثال في K . لتكن حلقة تبديلية L تحتوي K كحلقة جزئية (نقول أن L حلقة فوقية لِـ K) . إذا كانت :

$$u = (u_1, \dots, u_n) \in L^n$$

فإن العنصر :

$$\sum a_{r_1 \dots r_n} u_1^{r_1} \dots u_n^{r_n} \text{ ،} \tag{2}$$

الذي نحصل عليه بتعويض الحروف $X_1, \dots, X_n$ بعناصر L ، $u_1, \dots, u_n$ ، يسمى قيمة f في النقطة u ، ونرمز له باحدى الإشارتين :

$$f(u) \quad \text{أو} \quad f(u_1, \dots, u_n) \text{ .}$$

إذا كان $f(u) = 0$ فنقول عن u أنه صفر لِـ f (أو جذر إذا كان $n = 1$) .

إذا كانت L حلقة تبديلية و K حلقة جزئية منها ، فإننا نسمي **تابعاً على** L^n **معرّفاً بكثير حدود بأمثال في** K ، كل تطبيق $\varphi : L^n \to L$ بحيث يوجد كثير حدود f لـ n متحول وبأمثال في K ، بحيث يكون لدينا :

$$\varphi(u) = f(u) \text{ من أجل كل } u \in L^n$$

وبصورة عامة نقول عن تطبيق $\varphi : L^n \to L^r$ أنه معرف بكثير حدود وبأمثال في K ، إذا كان لدينا (ف 2 رقم 9)

$$\varphi = (\varphi_1, ..., \varphi_n)$$

حيث $\{\varphi_j\}_j$ توابع معرفة على L^n بكثيرات حدود بأمثال في K .

مثال 1 - إذا أخذنا $K = L$ و $n = 1$ فإننا نحصل على توابع ف 26 مثال 3 ، أي تطبيقات K في K التي هي من الشكل :

$$a_0 + a_1 t + ... + a_n t^n$$

حيث $a_0, ..., a_n$ عناصر «ثابتة» في K و t العنصر «المتغير» في K .

مثال 2 - نفترض أن K و n كيفيّان ولتكن L حلقة كثيرات حدود بأمثال في K . أي أن :

$$L = K[Y_1, ..., Y_p]$$

من أجل كل كثير حدود

$$f \in K[X_1, ..., X_n]$$

ومن أجل :

$$u_1, ..., u_n \in K[Y_1, ..., Y_p] \text{ ،}$$

فإنه بإمكاننا تعريف $f(u_1, ..., u_n)$ ، الذي نقول عنه أنه كثير الحدود في $Y_1, ..., Y_p$ **الناتج عن تعويض الحروف** $X_1, ..., X_n$ **بكثيرات الحدود** $u_1, ..., u_n$.

ونشير إلى أنه إذا أخذنا كحالة خاصة $L = K[X_1, ..., X_n]$

و : $$u_1 = X_1, ..., u_n = X_n$$

فإن كثير الحدود $f(u_1, ..., u_n)$ الذي نحصل عليه يكون f ذاته ، وهذه النتيجة تعني :

$$f = f(X_1, ..., X_n)$$

ومن الناحية التطبيقية نستعمل الرمز $f(X_1, ..., X_n)$ عوضاً عن f.

إن استعمال هذا الرمز يسمح للمتحولات X_i أن تظهر **عَلَنِيّاً في كتابة** f. على أن ذلك الإستعمال لا ينبغي أن ينسي القارئ كون الحروف X_i ليست عناصر متغيرة؛ انظر الملاحظة 3 من ف 27.

2. مجموع وجداء توابع معرّفة بكثيرات حدود

نعتبر حلقة تبديلية L وحلقة جزئية K منها وليكن عدداً طبيعياً $1 \leq n$. إذا كانت $u_1, ..., u_n \in L$، نعتبر التطبيق $v : K[X_1, ..., X_n] \to L$ المعرف بالعلاقة: $v(f) = f(u_1, ..., u_n)$.

لدينا بطبيعة الحال،

$$v(f) = f \quad \text{إذا كان} \quad f \in K \quad (\text{أي } f \text{ «ثابتة»}) \tag{3}$$

$$v(f) = u_i \quad \text{إذا كان} \quad f = x_i \tag{4}$$

ومن جهة أخرى فإن التطبيق v تماثل حلقات بحيث يكون لدينا من أجل كل f و g:

$$v(f + g) = v(f) + v(g) \tag{5}$$

$$v(fg) = v(f)\, v(g) \tag{6}$$

بالإضافة إلى $v(1) = 1$ الناتجة عن (3).

لنبرهن العلاقة (5)؛ ونضع:

$$f = \sum a_{r_1 ... r_n} X_1^{r_1} ... X_n^{r_n} \quad g = \sum f_{r_1 ... r_n} X_1^{r_1} ... X_n^{r_n};$$

ويكون لدينا: $f + g = h = \sum c_{r_1 ... r_n} X_1^{r_1} ... X_n^{r_n}$

حيث: $c_{r_1 ... r_n} = a_{r_1 ... r_n} + f_{r_1 ... r_n}$.

ومنها :

$$h(u_1, ..., u_n) = \sum c_{r_1...r_n} u_1^{r_1} ... u_n^{r_n} = \sum a_{r_1...r_n} u_1^{r_1} ... u_n^{r_n} +$$

$$+ \sum f_{r_1...r_n} u_1^{r_1} ... u_n^{r_n} = f(u_1, ..., u_n) + g(u_1, ..., u_n)$$

أما برهان العلاقة (6) فيمكن الحصول عليه بحساب مماثل لكن أكثر صعوبة .

هذا ويمكن أن نرى مباشرة أن الخواص (3) و (4) و (5) و (6)، تميز التطبيق v ، ومن الواضح أن صورة الحلقة $K[X_1, ..., X_n]$ وفق v هي الحلقة الجزئية $K[u_1, ..., u_n]$ من L والمولدة عن K و $u_1, ..., u_n \in L$.

ملاحظة 1 - تتألف نواة v من الكثيرات الحدود f التي تحقق $f(u_1, ..., u_n) = 0$ ، أي الجماعات $(a_{r_1...r_n})$ من عناصر L شبه المنعدمة كلياً والتي تحقق :

$$\sum a_{r_1...r_n} u_1^{r_1} ... u_n^{r_n} = 0 \text{ ؛}$$

وبعبارة أخرى، فإن نواة v مؤلفة من العلاقات الجبرية بين $u_1, ..., u_n$ وبأمثال في K (ف 26 رقم 2) . ولا نفرّق، من وجهة النظر التطبيقية، بين هذه العلاقات الجبرية وكثيرات الحدود f بأمثال في K ، والتي تحقق $f(u_1, ..., u_n) = 0$.

ونرى مما سبق، أنه إذا كانت $u_1, ..., u_n$ مستقلة جبرياً على K ، فإن نواة v تقتصر على O ، بحيث يصبح v تشاكلاً للحلقة $K[X_1, ..., X_n]$ على الحلقة الجزئية $K[u_1, ..., u_n]$ من L .

هذا ويمكن تأويل العلاقتين (5) و (6) كما يلي : من أجل كل كثير حدود $f \in K[X_1, ..., X_n]$ ، نعتبر التطبيق :

$$f^* : L^n \to L \text{ ؛}$$

المعرّف بالدستور : $f^*(u_1, ..., u_n) = f(u_1, ..., u_n)$.

فتكتب العلاقتان (5) و (6) على الشكل :

$(f+g)^* = f^* + g^*$ ،

$(fg)^* = f^* g^*$ ،

أي أن مجموع وجداء تابعين معرّفين على L^n بكثيري حدود بأمثال في K ، هما أيضاً من نفس الصنف. وتشير العلاقة (4) إلى أنه ضمن هذه التوابع المعرّفة بكثيرات حدود، توجد توابع الإحداثيات بالنسبة للأساس القانوني في L^n ، كما أن العلاقة (3) تشير إلى كون التوابع الثابتة لِـ L^n في K توجد أيضاً التوابع المذكورة.

إذا كانت M هي الحلقة المؤلفة من كل تطبيقات L^n في L ، فإن التطبيقات المعرّفة بكثيرات حدود، والتي إعتبرناها آنفاً، ليست في الواقع سوى الحلقة الجزئية من M والمولدة من جهة عن توابع الإحداثيات ومن جهة أخرى عن التطبيقات الثابتة لِـ L^n في K (ونعتبر هذه الأخيرة عناصر K ذاتها).

3. الحالة بالنسبة لحقل غير منته

لتكن حلقة تبديلية K ونعتبر كثيري حدود f و g لِـ n متحول وبأمثال في K و:

$$f^*,\ g^* : K^n \to K$$

المعرفين آنفاً (على K^n).

إن الحالة التي يكون فيها $f^* = g^*$ **لا تؤدي بالضرورة إلى كون** $f = g$ ، وهذا هو السبب الحقيقي الذي لا يمكننا عادة من مطابقة كثيرات الحدود بأمثال في K ، مع التوابع المعرفة بها.

مثال 3 – نأخذ $n = 1$ ونفترض أن K هي حقل منته ومؤلف من q عنصر. بما أن الزمرة الضربية K^* تتألف من $q - 1$ عنصر، فإن النظرية 5 من ف 7، تشير إلى صحة العلاقة:

$$x^{q-1} = 1 \text{ ، مهما كان } x \in K^*$$

ومنها نرى أن $x = x^q$ من أجل كل $x \in K$ ؛ وهذا يعني أنّ كثيرا الحدود X و X^q يعرفان نفس التابع، رغم أنهما غير متساويين.

هذه الصعوبة لا تحدث في الحالات العادية (وهي $K = \mathbf{R}; \mathbf{Q}; \mathbf{C}$) كما تؤكد النتيجة التالية:

نظرية 1 - ليكن كثيرا حدود f و g لـ n متحول وبأمثال في حلقة K تامة وغير منتهية. إن الشرط اللازم والكافي ليكون لدينا $f = g$ هو أن تتحقق $f(x) = g(x)$، من أجل كل $x \in K^n$.

باعتبار كثير الحدود $f - g$ فإن المسألة تؤول إلى برهان أنه من أجل كل كثير حدود $h \in K[X_1, ..., X_n]$، فإن العلاقة:

$$h(x) = 0 \text{ ، مهما كان } x \in K^n \text{ ،}$$

تستلزم $h = 0$. وسنقوم بإثبات ذلك على مراحل.

توطئة 1 - ليكن f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حلقة تبديلية K. حتى يكون عنصر $a \in K$ جذراً لِـ f فإنه يلزم ويكفي أنه يوجد كثير حدود $g \in K[X]$ بحيث:

$$f(X) = (X - a)\, g(X) .$$

(وتعني هذه العلاقة أن f من مضاعفات $X - a$ في الحلقة، $K[X]$).

لبرهان ذلك، نعتبر متحولاً Y يختلف عن X، ونعوض X بِـ $a + Y$؛ نحصل عندئذٍ على كثير حدود في Y، وهو $f(a + Y)$، الذي يمكن كتابته على الشكل:

$$f(a + Y) = u_0 + u_1 Y + ... + u_m Y^m$$

حيث $u_j \in K$. وبتعويض Y بِـ O في تلك العلاقة نجد:

$$f(a) = u_0 \text{ ،}$$

ومنها يكون بإمكاننا كتابة:

$$f(a+Y) = f(a) + Y h(Y)$$

من أجل كثير حدود $h \in K[Y]$. نعوّض الآن Y بـ $X - a$ في العلاقة السابقة . وإذا وضعنا $h(X-a) = g(X)$ فنحصل على :

$$f(X) = f(a) + (X-a)\, g(X) \cdot$$

وبذلك نرى أنه إذا كان a جذراً لـ f فإن $f(X) = (X-a)\, g(X)$ ؛ ومن البديهي أن العكس صحيح .

توطئة 2 — ليكن f كثير حدود لمتحول واحد ، بدرجة $n \geq 0$ ، وبأمثال في حلقة تبديلية K ونفترض أن K تامة . عندئذٍ f يقبل n جذراً في K على الأكثر .

إذا كانت درجة f تساوي الصفر ، فإن f ثابت غير منعدم بحيث لا يقبل أي جذر ، وبذلك تكون التوطئة محققة من أجل $n = 0$. لنبرهن الحالة العامة بالتدريج بالنسبة لِـ n ، درجة f .

ليكن $a \in K$ جذراً لِـ f ، تكون لدينا الكتابة $f(X) = (X-a)\, g(X)$ حيث درجة g تساوي $n - 1$ نظراً لأن K تامة (ف 27 نظرية 1) ؛ وإذا كان b جذر آخر لِـ f في K ، فيكون لدينا بالضرورة $0 = (b-a)\, g(b)$ ، ومنها نرى أن جذور f في K ، المختلفة عن a ، هي جذور g (إذ أن K تامة) ، وبما أن عدد جذور g هو $n - 1$ على الأكثر (حسب إفتراض التدريج) فإن f يقبل بدوره n جذراً على الأكثر في K وهذا يتم برهان التوطئة .

إعتماداً على التوطئة 2 ، نرى أن كل كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حلقة تامة K ، لا يقبل عدداً غير منته من الجذور إلاّ إذا كان منعدماً ، وهذا تعبير آخر للنظرية 1 في الحالة $n = 1$.

بقي برهان النظرية 1 بالنسبة لكثير حدود h لِـ n متحول وذلك بالتدريج . لدينا :

$$h(X_1, \ldots, X_n) = \sum h_r(X_1, \ldots, X_{n-1})\, X_n^r$$

حيث $h_r \in K[X_1, ..., X_{n-1}]$. نفترض أن $h(x) = 0$ من أجل كل $x \in K^n$ ؛ نحصل عندئذٍ على العلاقة :

$$\sum h_r(y) t^r = 0$$

من أجل كل $y \in K^{n-1}$ وكل $t \in K$. لنحدد $y \in K^{n-1}$ ؛ نرى عند ذلك أن كثير الحدود لمتحول واحد $\sum h_r(y) T^r$ ينعدم في كل نقط K ، وبما أن النظرية 1 صحيحة في الحالة $n = 1$ فنرى أن $h_r(y) = 0$ مهما كان $y \in K^{n-1}$ ومن أجل كل r ؛ وحسب التدريج نرى أن $h_r = 0$ مهما كان r بحيث يكون لدينا أخيراً $h = 0$ وبذلك نكون قد أتممنا البرهان.

(إن التمرين 1 يعطي تعميماً للنظرية 1) .

ف 29. حقل كسور حلقة تامة. الكسور الناطقة

1. حقل كسور حلقة تامة: تمهيد

من الواضح أن كل حلقة جزئية K من حقل هي حلقة تامة. ومن ناحية عكسية، نهدف في هذا الفصل إثبات أن كل حلقة تامة وتبديلية يمكن إعتبارها حلقة جزئية من حقل.

ولأجل إنشاء حقل يحتوي حلقة تبديلية تامة K معينة، نفترض في البداية أننا وجدنا حلاً للمسألة، أي أننا وجدنا حقلاً L تكون K حلقة جزئية منه. عندئذٍ فكل عنصر a من K غير معدوم يكون قابلاً للقلب في L؛ وبصورة أعم، إذا أخذنا عنصرين a و b من K حيث $b \neq 0$، فيكون بإمكاننا اعتبار الكسر التالي في L:

$$\frac{a}{b} = ab^{-1}$$

إن مجموعة هذه الكسور تؤلف حقلاً تبديلياً جزئياً من L ويحتوي K: لتكن L' هذه المجموعة وليكن x و y عنصرين من L'، يمكننا كتابة:

$$x = ab^{-1} \qquad y = cd^{-1}$$

حيث a و b و c و d عناصر من K و b و d غير معدومين. وبما أن K حلقة تبديلية فيمكن الحصول، بعد حساب بسيط، على العلاقتين

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd} \tag{1}$$

$$xy = yx = \frac{ac}{bd} \tag{2}$$

وبما أن :

$$\frac{a}{1} = a \qquad (3)$$

من أجل كل a في K ، فإننا نرى مباشرة أن L' حلقة جزئية من L تحتوي K . وللحصول على أن L' حقل جزئي من L ، فإننا نلاحظ أن عنصر ما $x = \frac{a}{b}$ من L' يكون غير معدوماً إذا وإذا فقط $a \neq 0$ ؛ ويكون لدينا عندئذٍ :

$$x^{-1} = (ab^{-1})^{-1} = ba^{-1} = \frac{b}{a}$$

ويعني ذلك أن x قابل للقلب في L' .

إذا وجد حقل L يحتوي K كحلقة جزئية فبإمكاننا إعتبار $L = L'$ بحيث يمكن كتابة كل عنصر من L على الشكل :

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{حيث} \quad b, a \quad \text{في} \quad K \quad \text{و} \quad b \neq 0 \qquad (4)$$

لتكن F مجموعة الأزواج (a, b) حيث a و b في K و $b \neq 0$ ؛ إن التطبيق :

$$v : F \rightarrow L$$

المعرَّف بالدستور :

$$v(a, b) = \frac{a}{b} = ab^{-1}$$

تطبيق غامر ؛ ولتكن R علاقة التكافؤ على F المتعلقة بالتطبيق v (ف 4 ، رقم 1) أي العلاقة $v(a, b) = v(c, d)$ التي تكتب أيضاً على الشكل :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \text{، أي } ad = bc$$

فيكون v عندئذٍ تركيب التطبيق القانوني لـ F في F/R وتطبيق v' لـ F/R على L (ف 4 ، نظرية 2) ، ومن الواضح أن v' تقابل . وإذا إستعملنا v' لمطابقة عناصر L مع العناصر التي تقابلها في F/R ، فإننا نرى أنه بإمكاننا إعتبار F/R حقلاً حيث العمليات معرَّفة بواسطة الدستورين (1) و (2) وبصورة أدق ، إذا إعتبرنا عنصرين x ، y من F/R حيث (a, b) و (c, d)

ممثلاهما في F ، فإن $x + y$ يكون عنصر $F/\mathcal{R}$ الممثَّل بالزوج $(ad + bc, bd)$ و xy يكون ممثَّلاً بـ (ac, bd) .

إن هذه الإعتبارات ، حيث إفترضنا وجود حل للمسألة ، سوف تساعدنا على إنشاء حقل L يحتوي K حيث K حلقة تبديلية .

2. إنشاء حقل الكسور

لتكن K حلقة تبديلية تامة ، و F مجموعة الأزواج (a, b) حيث b, a تنتمي إلى K مع $b \neq 0$. من أجل (a, b) و (c, d) من F ، نرمز للعلاقة :

$$ad = bc$$

بالكتابة :

$$(a, b) \equiv (c, d) \bmod \mathcal{R}$$

وهدفنا الأول هو برهان أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على F .

نلاحظ ، أولاً ، أن العلاقة :

$$(a, b) \equiv (a, b) \bmod \mathcal{R}$$

محققة دائماً إذ أنها تعني :

$$ab = ba$$

ومن جهة أخرى ، فإن العلاقة :

$$(a, b) \equiv (c, d) \quad \bmod \mathcal{R}$$

تستلزم العلاقة :

$$(c, d) \equiv (a, b) \quad \bmod \mathcal{R} \text{ ،}$$

إذ أن الأولى تعني $ad = bc$ وأما الثانية فتعني $cb = da$ لنعتبر أخيراً العلاقات :

$$(a, b) \equiv (c, d) \mod \mathcal{R}$$
$$(c, d) \equiv (e, f) \mod \mathcal{R}$$
$$(a, b) \equiv (e, f) \mod \mathcal{R}$$

ويمكن كتابتها على الشكل :

$$ad = bc$$
$$cf = de$$
$$af = be$$

وإذا قمنا بضرب الأولى بـ f والثانية بـ b فنحصل على $adf = bde$ أو $(af - be)d = 0$ ؛ وبما أن K تامة و $d \neq 0$ فيكون حتماً $af = be$ ومنها نرى أن العلاقة الأخيرة تنتج عن الأولى والثانية.

وهكذا نكون قد برهنا أن $\mathcal{R}$ علاقة تكافؤ على F ، وليكن θ التطبيق القانوني لـ F على $F/\mathcal{R}$.

لنبيّن الآن وجود قانوني تشكيل على المجموعة $F/\mathcal{R}$:

$$(x, y) \rightarrow x + y \qquad (x, y) \rightarrow xy$$

بحيث يكون لدينا من أجل كل (a, b) و (c, d) من F

$$\theta(a, b) + \theta(c, d) = \theta(ad + bc, bd) \tag{5}$$
$$\theta(a, b) \cdot \theta(c, d) = \theta(ac, bd) \tag{6}$$

ونلاحظ في البداية أن الطرف الأيمن من كلا العلاقتين له معنى ، وبعبارة أخرى أن $bd \neq 0$: إذ أن $b \neq 0$ و $d \neq 0$ و K حلقة تامة.

الآن. للتأكد من وجود تطبيقين لـ$(F/\mathcal{R} \times F/\mathcal{R})$ في $F/\mathcal{R}$ يحققان (5) و (6) ، فإننا نستخدم النظرية 3 من ف 4. حيث $X = Y = Z = F$ و $\mathcal{R} = \mathcal{S} = \mathcal{T}$ ويكون التطبيق :

$$f : F \times F \rightarrow F$$

إما معرّفاً بالدستور

$$f[(a, b), (c, d)] = (ad + bc, bd)$$

أو بالدستور :

$$. f[(a, b), (c, d)] = (ac, bd)$$

وحسب النظرية المذكورة، يصبح هدفنا إثبات النتيجة التالية : أنّ العلاقتين :

$$(a', b') \equiv (a'', b'') \mod \mathcal{R}$$

$$(c', d') \equiv (c'', d'') \mod \mathcal{R}$$

تستلزمان :

$$(a'd' + b'c', b'd') \equiv (a''d'' + b''c'', b''d'') \mod \mathcal{R} \tag{7}$$

$$(a'c', b'd') \equiv (a''c'', b''d'') \mod \mathcal{R}. \tag{8}$$

ونبدأ ببرهان العلاقة (8)، ويمكن كتابتها على الشكل :

$$؛ a'c'b''d'' = b'd'a''c''$$

ولدينا بالفرض :

$$c'd'' = d'c'' \quad و \quad a'b'' = b'a'' \tag{9}$$

وهكذا إذا ضربنا الطرف الأيمن من العلاقة الأولى بالطرف الأيمن من العلاقة الثانية من (9) وكذلك الشأن بالنسبة للطرف الأيسر، فإننا نحصل على العلاقة (8). أما العلاقة (7) فهي تكتب أيضاً على الشكل :

$$(a'd' + b'c')b''d'' = (a''d'' + b''c'')b'd'$$

أو

$$(a'b'' - a''b')d'd'' + (c'd'' - c''d')b'b'' = 0$$

وهذه الأخيرة تنتج طبعاً من (9).

وهكذا تتحقق شروط النظرية 3 من ف 4، ويوجد بالتالي قانوني تشكيل على المجموعة $F/\mathcal{R}$، يحققان (5) و (6)، كما أن النظرية المذكورة تعيّن القانونين بصورة دقيقة.

ملاحظة 1 - إن الطريقة التي ذكرناها تمكّننا من إنشاء الحقل **Q** إنطلاقاً من الحلقة **Z**؛ ونشير إلى أن كل عدد ناطق يُكتب على شكل كسر وذلك بعدد غير منته من الطرق المختلفة، وهكذا فإذا كتبنا :

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

نعني بذلك ، أننا إذا عوضنا بكسرين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ بكسرين مكافئين فإن الطرف الأيمن يعوض بكسر مكافئ .

3 . التحقق من شروط الحقول

نهدف في هذه الفقرة إثبات أن F/R ، مزوداً بالقانونين المعرفين بالفقرة السابقة ، حقل تبديلي .

نبدأ ببرهان كون قانون الجمع تبديلي ، ونظراً إلى العلاقة (5) ، فيكفي أن نلاحظ أنّ العنصر $(ad + bc, bd)$ من F ، لا يتغير إذا أبدلنا (a, b) مع (c, d) ، أي إذا عوضنا a ، b ، c ، d بِـ c ، d ، a ، b على الترتيب .

لنبرهن أن القانون تجميعي ؛ ولتكن :

$$z = \theta(e, f) \;؛\; y = \theta(c, d) \;؛\; x = \theta(a, b)$$

عناصر من F/R . يكون لدينا :

$$(x + y) + z = \theta(ad + bc, bd) + \theta(e, f) = \theta[(ad + bc)f + bde, dbf]$$

$$x + (y + z) = \theta(a, b) + \theta(cf + de, df) = \theta[adf + b(cf + de), bdf]؛$$

ويكفي ، إذن ، إثبات :

$$(ad + bc)f + bde = adf + b(cf + de)$$

وهذا بديهي .

إن الجمع يقبل عنصراً حيادياً :

$$0 = \theta(0, 1)$$

إذ أنه لدينا ، حسب (5) ،

$$\theta(0, 1) + \theta(a, b) = \theta(0 \cdot b + 1 \cdot a, 1 \cdot b) = \theta(a, b).$$

كل عنصر $x = \theta(a, b)$ يقبل نظيراً $-x$ حيث

$$-x = \theta(-a, b)$$

إذ أن :

$$\theta(a, b) + \theta(-a, b) = \theta(0, b^2)$$

مع العلم أن $\theta(0, 1) = \theta(0, b)$ مهما كان $b \neq 0$ وهذه العلاقة تعني $0 \cdot 1 = b \cdot 0$.

وبهذا نكون قد برهنا أن F/R ، مزودة بالجمع ، زمرة تبديلية.

لنبرهن الآن أن الضرب في F/R تبديلي ، تجميعي ويقبل عنصراً حيادياً. من الواضح أنه تبديلي وذلك حسب الدستور (6). كما نحصل على أنه تجميعي إذا نظرنا إلى العلاقتين :

$$[\theta(a, b) \cdot \theta(c, d)] \cdot \theta(e, f) = \theta(ac, bd) \cdot \theta(e, f) = \theta[(ac)e, (bd)f]$$
$$\theta(a, b) \cdot [\theta(c, d) \cdot \theta(e, f)] = \theta(a, b) \cdot \theta(ce, df) = \theta[a(ce), b(df)]$$

وأخيراً نرى بحساب بسيط أن $1 = \theta(1, 1)$ ، عنصر حيادي في F/R بالنسبة لقانون الضرب.

ولإتمام برهان كون F/R حقل ، بقي التأكد من صحة المطابقة $(x + y)z = xz + yz$ في F/R (خاصية التوزيع) ، ومن وجود مقلوب في F/R بالنسبة لكل عنصر غير معدوم. ونترك للقارئ الجزء الأول من هذا النص ، ولإثبات الجزء الثاني نبدأ بملاحظة أنّ العلاقة :

$$\theta(a, b) = 0$$

تكافؤ $a = 0$ ، إذ أن العلاقة المذكورة تعني $a \cdot 1 = b \cdot 0$.

ليكن إذن عنصراً غير منعدماً من F/R ، لدينا بطبيعة الحال :

$x = \theta(a, b)$ حيث $a \neq 0$ و $b \neq 0$:

ويمكننا عندئذٍ اعتبار العنصر التالي من F/R :

$x^{-1} = \theta(b, a)$ ؛

ونرى أن $x \cdot x^{-1} = \theta(ab, ab)$ ؛ لكن ، من جهة أخرى :

$$\theta(c, c) = 1 = \theta(1, 1)$$

مهما كان $c \neq 0$ ، نظراً لأن ذلك يعني $c \cdot 1 = 1 \cdot c$ ؛ وهكذا نحصل على $\theta(ab, ab) = 1$ وبالتالي x^{-1} هو مقلوب x في $F/\mathcal{R}$.

4. الحلقة K هي حلقة جزئية من حقل كسورها

يبقى لنا ، لإنهاء حل المسألة المطروحة في الفقرة 1 ، أن نبيّن كيف يمكن إعتبار K حلقة جزئية من الحقل $F/\mathcal{R}$ ؛ وكما هو الحال في أغلب الظروف ، لن نبرهن هنا أن K حلقة جزئية من $F/\mathcal{R}$ بالمعنى الدقيق (K ليست في الواقع مجموعة جزئية من $F/\mathcal{R}$) ، وإنما نكتفي بإنشاء تشاكلا «قانونيا» بين K وحلقة جزئية من $F/\mathcal{R}$ ، (على القارئ أن يتذكر كيف طابقنا الأعداد الحقيقية مع أعداد عقدية ، وعناصر حلقة تبديلية مع كثيرات حدود ذات أمثال في الحلقة المذكورة ، الخ . . .) .

نعتبر ، إذن ، التطبيق :

$$j : K \to F/\mathcal{R}$$

المعرّف بالدستور :

$j(a) = \theta(a, 1)$ ، مهما كان $a \in K$.

وهذا التطبيق متباين لأن العلاقة $\theta(a', 1) = \theta(a'', 1)$ نكتب أيضاً على الشكل $a' \cdot 1 = 1 \cdot a''$. كما أنه تماثل حلقات :

$$j(a') + j(a') = \theta(a', 1) + \theta(a'', 1) = \theta(a' \cdot 1 + 1 \cdot a'', 1 \cdot 1)$$
$$= \theta(a' + a'', 1) = j(a' + a'')$$
$$j(a') \cdot j(a') = \theta(a', 1) \cdot \theta(a'', 1) = \theta(a'a'', 1) = j(a'a'')$$
$$j(1) = \theta(1, 1) = 1.$$

وهكذا فإن j هو تشاكل لِـ K على حلقة جزئية من F/R : الحلقة الجزئية المؤلفة من العناصر $\theta(a, b)$ حيث $b = 1$: وإبتداء من الآن سوف لن نميّز بين عنصر a من K والعنصر $\theta(a, 1)$ من F/R ، وبتعبير آخر سوف نكتب من أجل كل $a \in K$:

$$\theta(a, 1) = a \qquad (10)$$

وتكون لدينا النتيجة التالية : كل عنصر من F/R هو خارج قسمة عنصرين من K ؛ وبصورة دقيقة

$$\theta(a, b) = a \cdot b^{-1} \qquad (11)$$

أو :

$$\theta(a, b) = \theta(a, 1) \cdot \theta(b, 1)^{-1} \qquad (12)$$

حيث : $\theta(b, 1)^{-1}$ لها معنى إذ أن $b \neq 0$.

لنبرهن العلاقة (12) ، ولأجل ذلك يكفي إثبات :

$$\theta(a, b) \cdot \theta(b, 1) = \theta(a, 1)$$

أي :

$$\theta(ab, b) = \theta(a, 1)$$

وهي بديهية إذ أنها تعني $a \cdot b \cdot 1 = b \cdot a$.

إن الحقل F/R ، الذي أنشأناه في ما سبق ، يسمى **حقل كسور الحلقة التبديلية التامة** K ، ويمكن للقارئ أن ينسى ، إبتداء من الآن ، الطريقة التي إستعملناها لإنشاء الحقل المذكور ؛ ويكفي ، لكل مجالات التطبيق ، معرفة الخواص التالية :

K حلقة جزئية من حقل كسورها ،

كل عنصر من حقل الكسور هو خارج قسمة عنصرين من K . وبصفة خاصة ، لن نستعمل بعد الآن الرمز $\theta(a, b)$ ، بل إننا نعيّن عناصر حقل الكسور بالرمز $\frac{a}{b}$ أو ab^{-1} . لكن على القارئ ألّا يعتقد أن المساواة بين كسرين $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ تستلزم $a = c$ و $b = d$ ؛ إن الكسر ليس بزوج (a, b) من عناصر k ، حيث $b \neq 0$ ، بل هو صف تكافؤ لأزواج من هذا الصنف .

ومن الواضح أننا نحصل على الحقل **Q**، حقل الأعداد الناطقة، إذا إنطلقنا من $K = \mathbf{Z}$، حيث **Z** حلقة الأعداد الصحيحة. ورغم أنه توجد طرق مختلفة. «بسيطة» أو «هندسية»، لتعريف الأعداد الناطقة إنطلاقاً من الأعداد الصحيحة، فإن الطريقة الوحيدة الصحيحة رياضياً هي التي أخذناها؛ هذا وأن إفتراض $K = \mathbf{Z}$ لا يجعل الدراسة أبسط (انظر ملاحظة 1).

5. كسور ناطقة بأمثال في حقل

ليكن K حقلاً تبديلياً؛ كنا قد رأينا (ف 27، نظرية 1) أن الحلقة $K[X_1, ..., X_n]$، المؤلفة من كثيرات الحدود لِـ n متحول وبأمثال في K، هي حلقة تامة، وذلك من أجل كل عدد صحيح $n \geq 1$. ويمكننا إذن تطبيق النتائج السابقة على هذه الحلقة ونرمز لحقل كسورها بالعبارة.

$$K(X_1, ..., X_n)$$

ونسمي الحقل المذكور: **حقل الكسور الناطقة ذات n متحول على الحقل** K. ونسمي عناصر $K(X_1 ..., X_n)$ **كسوراً ناطقة ذات n متحول وبأمثال في** K.

أنه ليس ضرورياً، في التطبيقات العملية، الرجوع إلى إعتبارات الفقرة 2؛ إذ أن هذه الأخيرة، كما سبق أن قلنا، تساعد فقط على إثبات وجود الحقل $K(X_1 ..., X_n)$. وإن المهم، في مجال التطبيق، هو معرفة خواص الحقل المذكور. وهي كالآتي:

(1ك). إن الكسور الناطقة ذات n متحول وبأمثال في K، هي عناصر حقل تبديلي يرمز له:

$$K(X_1, ..., X_n)$$

(2ك). إن كثيرات الحدود لِـ n متحول وبأمثال في K، توجد ضمن الكسور الناطقة ذات n متحول وبأمثال في K، أي أن $K[X_1 ..., X_n]$ هي حلقة جزئية من $K(X_1, ..., X_n]$.

(35) . من أجل كل كسر ناطق $f \in K(X_1, ..., X_n)$ ، فإنه يوجد كثيري حدود p و q من $K[X_1, ..., X_n]$ حيث $q \neq 0$ بحيث :

$$f = \frac{p}{q} = p \cdot q^{-1}$$

وتوجد بطبيعة الحال طرق متعددة لكتابة f على شكل خارج قسمة كثيري حدود ، كما أن الكسرين الناطقين $\frac{p'}{q'}$ و $\frac{p''}{q''}$

يكونان متساويين إذا وإذا فقط كان لدينا $p'q'' = q'p''$.

مثال 1 – كل كسر ناطق لمتحول واحد وبأمثال في حقل K هو عبارة من الشكل :

$$f = \frac{p(X)}{q(X)}$$

حيث p و q كثيري حدود للمتحول X وبأمثال في K مع $q \neq 0$. مثلاً :

$$\frac{X^3 + X^2 - 1}{X^2 - 1} ،$$

ونلاحظ أن الشرط $q \neq 0$ لا يمنع أن يكون لدينا $q(x) = 0$ من أجل بعض القيم x ؛ والشرط المذكور لا يعني أكثر من كون q ليس العنصر 0 من الحلقة $K[X]$ أي أن أمثاله ليست معدومة كلياً .

مثال 2 – إن العبارة :

$$f = \frac{X + Y}{X - Y}$$

هي كسر ناطق لمتحولين ، X و Y ، وبأمثال في $\mathbf{Q}$.

6. قيم كسر ناطق

ليكن L حقلاً تبديلياً، K، حقلاً جزئياً من L و f كسراً ناطقاً لِـ n متحول وبأمثال في K وليكن:

$$u = (u_1, ..., u_n)$$

عنصراً من L^n. نقول أن f **معرّفاً في** u، أو أن $u_1, ..., u_n$ **قابلة للإستبدال** في f، إذا وجد كثيرا حدود p و q **يحققان**:

$$f = \frac{p}{q} \text{ و } q(u_1, ..., u_n) \neq 0 \text{ ؛}$$

ولا يعني ذلك أنه مهما كان كثيري الحدود p و q $(q \neq 0)$ **بحيث** $f = \frac{p}{q}$، أن $q(u_1, ..., u_n) \neq 0$.

مثال 3 - إن $u = 0$ قابل للإستبدال في الكسر الناطق:

$$\frac{X^2}{X^2 + X}$$

إذ أن هذه الأخيرة تكتب أيضاً على الشكل:

$$\frac{X}{X + 1}$$

حيث لا ينعدم المقام في $u = 0$.

إذا كان f معرّفاً في $u = (u_1, ..., u_n)$ فإنه يمكن تعريف **قيمة** f في u، بالطريقة التالية: نكتب:

$$f = \frac{p}{q} \text{ مع } q'(u) \neq 0 \text{ ؛}$$

إن العنصر: $\frac{p(u)}{q(u)}$ لا يتعلق إلاّ بِـ f وليس باختيار p و q. إذ لو عبّرنا f بصورة ثانية:

$$f = \frac{p'}{q'} \text{ مع } q'(u) \neq 0$$

فيكون لدينا :

$$pq' = p'q$$

وبالتالي (ف 28 ، دستور (6)) :

$$p(u)\,q'(u) = p'(u)\,q(u)$$

ومنها :

$$\frac{p(u)}{q(u)} = \frac{p'(u)}{q'(u)}$$

وهذا يثبت نصّنا. هذا وإن العنصر $\frac{p(u)}{q(u)}$ من L هو ما نسميه قيمة f في u ونُعَيِّنُهُ بالرّمز :

$f(u)$ أو $f(u_1, ..., u_n)$ ؛

ويكون لدينا عندئذٍ :

$f(u) = \frac{p(u)}{q(u)}$ ، إذا كان $f = \frac{p}{q}$ حيث $q(u) \neq 0$.

إذا كان f هو كثير حدود، فإنه يكون معرّفاً في u مهما كان u ، وتكون القيمة $f(u)$ التي عرّفناها آنفاً هي نفس التي عرّفناها في ف 28 ، رقم 1 : يكفي للحصول على ذلك أن نكتب $f = \frac{f}{1}$.

لنبرهن الآن أن مجموعة الكسور الناطقة المعرّفة في نقطة $u \in L^n$ هي حلقة جزئية من $K(X_1, ..., X_n)$. ولهذا الغرض نفترض f' و f'' معرّفتين في u ؛ وبإمكاننا عندئذٍ كتابة :

$$f' = \frac{p'}{q'} \quad \text{حيث} \quad q'(u) \neq 0$$

$$f'' = \frac{p''}{q''} \quad \text{حيث} \quad q''(u) \neq 0$$

ومنها نحصل على :

$$f' \cdot f'' = \frac{p'p''}{q'q''} \text{ ؛ } f' + f'' = \frac{p'q'' + p''q'}{q'q''}$$

وبما أن $q'(u)\,q''(u) \neq 0$ فإننا نرى أن $f'f''$ و $f' + f''$ معرّفين في u ،

وبما أن كل كثير حدود (وبالخصوص 1) معرف في u فينتج عن ذلك أن الـكسور الناطقة المعرّفة في u . تؤلف حلقة جزئية من $K(X_1, \ldots, X_n)$.

إذا كانت f' و f'' معرّفتين في $u \in L^n$ ، فإن $f'(u) + f''(u)$ هي قيمة $f' + f''$ في النقطة u و $f'(u) \cdot f''(u)$ قيمة $f'f''$ في النقطة المذكورة .

ولهذا الغرض نواصل إستعمال الرموز السابقة وليكن $g = f' + f''$ ؛ ويكون لدينا عندئذٍ :

$$g = \frac{p}{q} \quad \text{حيث} \quad p = p'q'' + p''q' \quad \text{و} \quad q = q'q' ،$$

ومنها :

$$g(u) = \frac{p'(u)\,q''(u) + p''(u)\,q'(u)}{q'(u)\,q''(u)} = \frac{p'(u)}{q'(u)} + \frac{p''(u)}{q''(u)}$$

مما يثبت الجزء الأول من النص ، أمّا الجزء الثاني فيمكن الحصول عليه بطريقة مماثلة .

إذا كان f معرفاً في u فإن الشرط اللازم والكافي ليكون f^{-1} معرّفاً في u هو أن $f(u) \neq 0$ وعندئذٍ يكون لدينا :

$$f^{-1}(u) = f(u)^{-1} .$$

نفترض . لبرهان ذلك . أن f و f^{-1} معرفان في u ، من العلاقة $1 = f \cdot f^{-1}$ نحصل على

$$1 = f(u) \cdot f^{-1}(u)$$

وهذا يثبت أنّ $f(u) \neq 0$ وأنّ $f^{-1}(u) = f(u)^{-1}$. لنفترض من ناجية عكسية أن f معرف في u وأن $f(u) \neq 0$ ؛ لدينا $f = \frac{p}{q}$ حيث $q(u) \neq 0$ و $p(u) \neq 0$ ؛ وإذا كتبنا $f^{-1} = \frac{q}{p}$ فنرى أن الـكسر الناطق f^{-1} معرّف في u .

مثال ٤ - لنأخذ ... الكسر الناطق :

$$f = \frac{X + Y}{X - Y}$$

المعرّف في كل نقطة $(u, v) \in L^2$ بحيث $u \neq v$ (أي خارج القطر) ؛ لا توجد أي نقطة أخرى من L^2 يكون f معرّفاً فيها. بالفعل، إذا كان p و q كثيري حدود بحيث $f = \frac{p}{q}$، فإنه يكون لدينا :

$$(X+Y)\,q(X, Y) = (X-Y)\,p(X, Y)$$

وإذا وضعنا $p = \sum p_n$ و $q = \sum q_n$ حيث p_n و q_n متجانسة وذات درجة تامة n، فإن العلاقة السابقة تؤدي إلى :

$$(X+Y)\,q_n(X, Y) = (X-Y)\,p_n(X, Y)$$

ونستنتج من ذلك أنه يوجد كثير حدود $r_n(X, Y)$، مهما كان n، بحيث :

$$q_n(X, Y) = (X-Y)\,r_n(X, Y)$$

(على القارئ أن يبرهن ذلك بتعيين أمثال p_n و q_n وإيجاد علاقات بين تلك الأمثال).

وتؤدي العلاقة السابقة إلى أن $q(u, v) = 0$ من أجل $u = v$ بحيث لا يمكن تعريف f في أيّ نقطة من القطر.

مثال 5 - ليكن K حقلاً تبديلياً كيفياً ونأخذ :

$$L = K(X_1, \ldots, X_n)$$
$$u = (X_1, \ldots, X_n) \in L^n;$$

عندئذٍ يكون كل كسر ناطق $f \in K(X_1, \ldots, X_n)$ معرّفاً في u، إذ أنه إذا كتبنا $f = \frac{p}{q}$ حيث $q \neq 0$ فإن $q(X_1, \ldots, X_n) \neq 0$ وهذا لأن :

$$q = q(X_1, \ldots, X_n)$$

كما رأينا ذلك في ف 28، ملاحظة 1. وهكذا يكون بإمكاننا تعريف $f(X_1, \ldots, X_n)$، وهو عنصر من L معطى بالدستور :

$$f(X_1, \ldots, X_n) = \frac{p(X_1, \ldots, X_n)}{q(X_1, \ldots, X_n)} = \frac{p}{q} = f.$$

وهذا يفسّر السبب الذي يجعلنا، من الناحية التطبيقية، نعين كسراً ناطقاً ما بالرّمز $f(X_1, ..., X_n)$ ؛ إذ أن الإعتبارات السابقة تسمح لنا كتابة $f = f(X_1, ..., X_n)$ ، بينما تؤخذ هذه العلاقة إصطلاحاً في أغلب الدراسات التقليدية.

ويفسّر هذا المثال أيضاً السبب الذي يُحتّم تعريف قيمة كسر ناطق بأمثال في K في نقطة تكون مركباتها في حقل فوقي للحقل K. ومن الضروري، في التطبيقات الإبتدائية، معرفة إعطاء قيمة لكسر ناطق بأمثال حقيقية في نقطة تكون مركباتها عقدية.

ملاحظة 2 - إذا كان كسر ناطق $f \in K(X_1, ..., X_n)$ غير معرّف في نقطة $u \in L^n$ ، حيث L حقل فوقي للحقل K ، فهناك إمكانيتان: إمّا أن يكون $\frac{1}{f}$ ، مقلوب f ، معرّفاً في u (نقول عندئذٍ عن u أنه **قطب لـ** f) وإما أن يكون $\frac{1}{f}$ غير معرف في u ، (نقول عندئذٍ عن u أنها **نقطة عدم تعيين لـ** f). وتحدث الإمكانية الأولى إذا وإذا فقط أماكن كتابة:

$$f = \frac{p}{q} \text{ حيث } p(u) \neq 0 \text{ و } q(u) = 0 \text{ ؛}$$

ومن الواضح في هذه الظروف أن $\frac{1}{f}$ تكون معرّفة في u وتأخذ القيمة 0؛ ومن ناحية عكسية، إذا كان u قطباً لـ f ، وبما أنّ f^{-1} معرفة في u ، فيكون لدينا:

$$f^{-1} = \frac{q}{p} \text{ حيث } p(u) \neq 0 \text{ ؛}$$

فإذا كان $f^{-1}(u) \neq 0$ فتكون بالتالي f معرفة أيضاً في u وهذا يناقض إفتراضنا. ومنه فإن $f^{-1}(u) = 0$ أي أن $q(u) = 0$ وبالتالي:

$$f = \frac{p}{q} \text{ حيث } p(u) \neq 0 \text{ و } q(u) = 0$$

ونحصل من الإعتبارات السابقة على شرط كافٍ لمعرفة نقط عدم تعيين f : إذا كان لدينا:

$p(u) = q(u) = 0$ مهما كان كثيري الحدود p و q بحيث:

$$f = \frac{p}{q} \text{ ، } q \neq 0 \text{ ،}$$

فإن u تكون نقطة عدم تعيين لِـ f.

نأخذ كمثال $K = L = \mathbf{C}$ والـكسر الناطق لمتحولين:

$$f = \frac{X + Y}{X - Y}$$

وهو معرف في كل نقطة $(u, v) \in \mathbf{C}^2$ بحيث $u \neq v$ ، على أن كل نقط القطر ، باستثناء النقطة $(0, 0)$ ، هي أقطاب لِـ f ؛ كما أن $(0, 0)$ هي نقطة عدم تعيين . ولأجل الحصول على هذه النتيجة الأخيرة ، ينبغي أن نبرهن أنه مهما كان كثير الحدود p و q من $\mathbf{C}[X, Y]$ حيث :

$$\frac{p}{q} = \frac{X + Y}{X - Y}$$

فإنه يكون لدينا حتماً :

$$. \, 0 = q(0, 0) = p(0, 0)$$

لنضع :

$$p = a + a' X + a'' Y + \dots$$

$$q = b + b' X + b'' Y + \dots$$

حيث لم نكتب الحدود ذات درجة تساوي 2 أو تتعداها ؛ ومن الإفتراض لدينا :

$$(X + Y)p = (X + Y)q$$

أي

$$(X - Y)(a + a' X + a'' Y + \dots) = (X + Y)(b + b' X + b'' Y + \dots)$$

وبالتالي :

$$a(X - Y) = b(X + Y)$$

ويعني ذلك أن $a = b = -b$

ومنها نرى أن $a = b = 0$ ؛ بما أن $p(0, 0) = a$ و $q(0, 0) = b$ فنحصل على $p(0, 0) = q(0, 0) = 0$ وهو المطلوب .

إن الدراسة الموسَّعة للكسور الناطقة وللمسائل المماثلة (التوابع الجبرية لمتحولات متعددة)، تشكل هدفاً أساسياً من أهداف الهندسة الجبرية.

ف 30. الاشتقاق ، دستور تايلور

إذا كان $f(t)$ تابعاً لمتحول حقيقي فإن مشتقه $f'(t)$ يعرّف ، في دراسة التوابع الحقيقية ، بواسطة «إنتقال للنهاية» ، أي بطريقة ليست جبرية تماماً. ومع ذلك ، إذا كان f تابعاً معرّفاً بكثير حدود :

$$f(t) = \sum a_r\, t^r$$

فإننا نعلم أن مشتقه يكون :

$$f'(t) = \sum r\, a_r\, t^{r-1}$$

ومن الواضح أنه إذا إقتصرنا على دراسة التوابع المعرّفة بكثيرات حدود ، فإن الدستور السابق يسمح بحساب المشتق مباشرة دون إستعمال أي وسيلة إنتقال للنهاية.

وتشير هذه الملاحظات إلى إمكانية تعميم مفهوم الاشتقاق إلى كثيرات الحدود ذات أمثال في حلقة تبديلية كيفية ، وذلك بوسائل جبرية بحتة. وهذا ما سنقوم به في هذا الفصل.

ولن تكون النتائج التي سنحصل عليها مجرّد تعميمات لبقة وخالية من الفوائد ، بل إننا سنستعمل النتائج المذكورة بصدد التمييز بين الجذور البسيطة والجذور المضاعفة بالنسبة لمعادلة جبرية.

كما أن هذه التعميمات تساعد حالياً على حل مسائل هامة أخرى (كالتمييز بين «النقط البسيطة» و«النقط المضاعفة» بالنسبة لخطيات جبرية).

1. الاشتقاق في حلقة

لتكن K حلقة، نسمي اشتقاقاً في الحلقة K، كل تطبيق:

$$D : K \to K$$

يحقق العلاقتين:

$$D(x + y) = D(x) + D(y) \tag{1}$$

$$D(xy) = D(x)y + x\,D(y) \tag{2}$$

من أجل كل x و y في K؛ ومن الواضح أن هذا التعريف مستوحى من القواعد المألوفة للإشتقاق.

مثال 1 - نفترض أن K هي حلقة التوابع على **R** والمعرّفة بكثيرات حدود؛ إذا كان:

$$x(t) \sum a_r t^r$$

تابعاً من هذا الصنف، فإن التابع:

$$x'(t) = \sum r a_r\, t^{r-1}$$

يكون بالتعريف $D(x)$؛ ونستنتج، من قواعد الاشتقاق المألوفة، أن التابع D هو اشتقاق في الحلقة K.

وتشير العلاقتان (1) و (2) إلى أن:

$$D(1) = 0 \tag{3}$$

إذ أنه إذا وضعنا في (2)، $y = 1$، يكون لدينا من أجل كل x، $xD(1) = 0$، ومنها $D(1) = 0$. وإذا كانت K حلقة تبديلية، فإن:

$$D(x^n) = nx^{n-1} D(x) \tag{4}$$

من أجل كل $x \in K$ وكل عدد صحيح $n \geq 0$؛ فمن أجل $n = 0$ تكون لدينا العلاقة (3)، وإذا كانت (4) محققة بالنسبة لِـ $n - 1$ فإن (2) تؤدي إذا كانت K تبديلية:

$$D(x^n) = D(x^{n-1}x) = D(x^{n-1})x + x^{n-1}D(x)$$
$$= (n-1)x^{n-2}D(x)x + x^{n-1}D(x) = nx^{n-1}D(x)$$

2. الاشتقاق في حلقة كثيرات حدود

نهدف إلى برهان النتيجة التالية :

نظرية 1 - ليكن D اشتقاقاً في حلقة تبديلية K . إذا كان $u \in K[X]$ فإنه يوجد في الحلقة $K[X]$ إشتقاق وحيد ينطبق مع D على K ويكون u صورة X وفق هذا الاشتقاق.

نفترض أننا وجدنا اشتقاقا D' من النوع المطلوب ؛ وليكن كثير حدود :

$$f = \sum a_r X^r \quad ، \quad (a_r \in K) ،$$

من (1)، (2) و (4) نرى أن :

$$D'(f) = \sum D'(a_r X^r)$$
$$= \sum [D'(a_r)X^r + r a_r X^{r-1} D'(X)]$$

وحسب الشروط التي افترضناها بالنسبة لِـ D' ، نحصل على :

$$D'(f) = \sum D(a_r)X^r + u(X) \sum r a_r X^{r-1} \tag{5}$$

ويمكن إعطاء عبارة سهلة الإستعمال لهذه النتيجة ، وندخل لأجل ذلك كثير الحدود :

$$f^D(X) = \sum D(a_r)X^r \tag{6}$$

بتطبيق D على أمثال f ، وندخل أيضاً كثير الحدود المشتق

$$f'(X) = \sum r a_r X^{r-1} \tag{7}$$

وعندئذٍ فإن (5) تأخذ الشكل التالي :

$$D'(f) = f^D + u \cdot f' \qquad (8)$$

وهذا ما يثبت وحدانية D' .

بقي برهان كون التطبيق :

$$D' : K[X] \to K[X]$$

المعطى بالدستور (8) هو فعلاً إشتقاق يحقق شروط النص . ونرى أن (1) محققة نظراً للدستورين البديهيين :

$$(f+g)^D = f^D + g^D$$
$$(f+g)' = f' + g'$$

ولإثبات (2) نلاحظ في البداية ما يلي : إذا كان D_1 و D_2 إشتقاقين في حلقة L ، فإن التطبيق من L في L .

$x \to u_1 D_1(x) + u_2 \cdot D_2(x)$ ؛ u_1 و u_2 عنصرين من L ، هو أيضاً إشتقاق في L ، ولبرهان أن D' تحقق (2) فإنه يكفي ، حسب العلاقة (8) ، أن نبرهن أن التطبيقين :

$$f \mapsto f' \quad \text{و} \quad f \mapsto f^D$$

هما إشتقاقان في $K[X]$ ، أي ، أن يكون لدينا :

$$(fg)' = f'g + fg' \quad \text{و} \quad (fg)^D = f^D \cdot g + f \cdot g^D$$

نبدأ بدراسة الحالة :

$$g = bX^q \quad \text{و} \quad f = aX^p ،$$

عندئذٍ نحصل على :

$$(fg)^D = (abX^{p+q})^D = D(ab)X^{p+q} = D(a)X^p \cdot bX^q + aX^p \cdot D(b)X^q$$

$$(fg)' = (abX^{p+q})' = (p+q)abX^{p+q-1} = paX^{p-1} \cdot bX^q + aX^p \cdot qbX^{q+1}$$

وبذلك نحصل على الدستورين المطلوبين ، في الحالة الخاصة التي

إعتبرناها. أما الحالة العامة فيمكن دراستها بتجزئة f و g بحيث نرجع إلى الحالة الخاصة.

وهكذا فإننا قد برهنا أن التطبيق (8) هو فعلاً إشتقاق، بقي أن نبرهن أنه ينطبق مع D على K من جهة، أي:

$$f = a \in K \text{ تستلزم } D'(f) = D(a)$$

وهذا واضح حسب (5)، ومن جهة أخرى أن:

$$D'(X) = u$$

وهو أيضاً واضح إذا كتبنا $X = X \cdot 1$ ولاحظنا أن $D(1) = 0$. وهكذا ينتهي برهان النظرية 1.

3. المشتقات الجزئية

يمكن تعميم النظرية 1 إلى كثيرات الحدود ذات متحولات متعددة، ونحصل على النتيجة التالية:

نظرية 2 - لتكن K حلقة تبديلية و D اشتقاق في K و u_1، u_2، ...، u_n كثيرات حدود ذات n متحول وبأمثال في K. يوجد اشتقاق وحيد D' في الحلقة $K[X_1, ..., X_n]$ ويكون إقتصاره على K هو D ويحقق:

$$D'(X_i) = u_i \text{ من أجل } 1 \leq i \leq n.$$

إن برهان هذه النظرية مشابه لبرهان النظرية 1 ونكتفي بإعطاء طريقة لحساب $D'(f)$ من أجل:

$$f = \sum a_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}$$

وبما أن D' إشتقاق فإنه يكون لدينا:

$$D'(f) = \sum D'(a_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n})$$

$$= \sum D'(a_{r_1 \dots r_n}) X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} + \sum a_{r_1 \dots r_n} D'(X_1^{r_1}) X_2^{r_2} \dots X_n^{r_n} +$$

$$+ \dots + \sum a_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \dots X_{n-1}^{r_{n-1}} D'(X_n^{r_n})$$

وبما أن $D'(a) = D(a)$ من أجل $a \in K$ ، و $D'(X_i) = u_i$ فإننا نحصل على :

$$D'(f) = \sum D(a_{r_1 \dots r_n}) X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} + \tag{9}$$

$$+ u_1 \sum r_1 a_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1 - 1} X_2^{r_2} \dots X_n^{r_n} +$$

$$+ \dots + u_n \sum r_n a_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \dots X_{n-1}^{r_{n-1}} X_n^{r_n - 1}$$

وهذا يجعلنا ندخل، كما فعلنا بالفقرة السابقة، الرموز التالية : نضع في البداية :

$$f^D = \sum D(a_{r_1 \dots r_n}) X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n} \text{ ؛}$$

وهو كثير الحدود الذي نحصل عليه عندما نطبّق D على أمثال f . ومن جهة أخرى فإن المشتق الجزئي لِـ f بالنسبة لِـ X_i هو بالتعريف كثير الحدود :

$$f'_i = \sum r_i a_{r_1 \dots r_n} X_1^{r_1} \dots X_{i-1}^{r_{i-1}} X_i^{r_i - 1} X_{i+1}^{r_{i+1}} \dots X_n^{r_n} \tag{10}$$

وإذا اعتبرنا f كثير حدود بالنسبة لِـ X_i وبأمثال في الحلقة :

$$K[X_1, \dots, X_{i+1}, X_{i-1}, \dots, X_n]$$

فإن f'_i هو مشتق f حسب مفهوم الفقرة السابقة (وهذا منسجم مع المفهوم المألوف للإشتقاق الجزئي للتوابع ذات متغيرات متعددة : نقوم بالاشتقاق بالنسبة لمتغير ونعتبر المتغيرات الأخرى «ثابتة») . وهكذا فإن العلاقة (9) تكتب أيضاً على الشكل :

$$D'(f) = f^D + \sum_{i=1}^{i=n} u_i \cdot f'_i \tag{11}$$

نستعمل عادة في المجال التطبيقي أحد الرّمزين :

$$f'x_i \text{ ، } \frac{\partial f}{\partial X_i}$$

بدلاً عن f'_i. وإذا وضعنا:

$$D_i(f) = f'_i$$

فإن التطبيق D_i للحلقة $K[X_1, ..., X_n]$ في نفسها يحقق الشروط التالية: D_i إشتقاق، ولدينا:

$$D_i(a) = 0 \quad \text{إذا كان } a \in K$$

$$D_i(X_j) = 0 \quad \text{إذا كان } i \neq j$$

$$D_i(X_i) = 1.$$

وحسب النظرية 2، أو النظرية 1 إذا طبقناها على الحلقة:

$$K[X_1, ..., X_{i-1}, \ X_{i+1}, ..., X_n]$$

حيث ينعدم D_i، فإننا نرى أن الشروط المذكورة تميّز التطبيق D_i.

4. إشتقاق التوابع المركّبة

إن نظرية «إشتقاق التوابع المركّبة»، إذا كان الأمر يتعلق بكثيرات الحدود، هي نتيجة للنظرية التالية:

نظرية 3 - إذا كانت L حلقة تبديلية و K حلقة جزئية من L و D إشتقاقاً في L منعدماً على K و f كثير حدود لِـ n متحول وبأمثال في K، فإنه يكون لدينا مهما كان u_1، ...، u_n من L:

$$D[f(u_1, ..., u_n)] = \sum_{i=1}^{i=n} f'_i(u_1, ..., u_n) \cdot D(u_i)$$

يكفي أن نبرهن هذه النظرية من أجل:

$f = a X_1^{r_1} \dots X_n^{r_n}$ ،

عندئذٍ يكون لدينا :

$$D[f(u_1, \dots, u_n)] = D(au_1^{r_1} \dots u_n^{r_n})$$

$$= D(a)u_1^{r_1} \dots u_n^{r_n} + \sum_{i=1}^{i=n} au_1^{r_1} \dots u_{i-1}^{r_{i-1}} D(u_i^{r_i}) u_{i+1}^{r_{i+1}} \dots u_n^{r_n}$$

$$= D(a)u_1^{r_1} \dots u_n^{r_n} + \sum_{i=1}^{i=n} D(u_i) r_i \; au_1^{r_1} \dots u_{i-1}^{r_{i-1}} \; u_i^{r_i - 1} \; u_{i+1}^{r_{i+1}} \dots u_n^{r_n}$$

وإذا كان $D = 0$ على K ، فإن الطرف الأول يختفي بحيث يكون لدينا الدستور المطلوب .

نتيجة - لتكن K حلقة تبديلية و f كثير حدود لِـ n متحول وبأمثال في K ، ولتكن :

$$u_1 \text{ ، } \dots \text{ ، } u_n \in K[Y_1, \dots, Y_p]$$

كثيرات حدود ذات p متحول وبأمثال في K .

إن المشتقات الجزئية لـكثير الحدود :

$$g(Y_1, \dots, Y_p) = f[u_1(Y_1, \dots, Y_p), \dots, u_n(Y_1, \dots, Y_p)]$$

هي معطاة بالعلاقات :

$$\frac{\partial g}{\partial Y_j} = \sum_{i=1}^{i=n} f'_i(u_1, \dots, u_p) \frac{\partial u_i}{\partial Y_j} \quad (1 \leq j \leq p)$$

إن هذه النتيجة ، التي نحصل عليها بأخذ $L = K[Y_1 \dots, Y_p]$ وإعتبار أن D هو الإشتقاق الجزئي بالنسبة لِـ Y_j وتطبيق النظرية 3 ، هذه النتيجة تسمى نظرية التوابع المركبة (حيث يتعلق الأمر بكثيرات الحدود) .

5. دستور تايلور

لتكن K حلقة تبديلية و f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في K ونعتبر كثير الحدود $X + Y$ للمتحولين X و Y، وبأمثال في K. وإذا عوضنا متحول f بكثير الحدود هذا، فإننا نحصل على:

$$f(X+Y) \in K[X, Y] = K[X][Y]$$

الذي يمكن إعتباره كثير حدود لمتحول Y وبأمثال في $K[X]$، بحيث يكتب على الشكل:

$$f(X+Y) = f_0(X) + f_1(X)Y + \dots + f_n(X)Y^n \qquad (12)$$

إذا كانت n هي درجة f. ونهدف إلى حساب كثيرات الحدود $f_p(X)$، وذلك بواسطة **مشتقات** f **المتتالية**، أي بواسطة كثيرات الحدود:

$$f' \text{ و } f'' = (f')' \quad \text{و} \quad f''' = (f'')' \text{، } \dots$$

للحصول على ذلك، نقوم بإشتقاق طرفي العلاقة (12)، بالنسبة لِـ Y؛ وحسب نتيجة النظرية 3 فإن مشتق الطرف الأيسر يكون $f'(X+Y)$؛ ومنها نرى أن:

$$f'(X+Y) = f_1(X) + 2f_2(X)Y + \dots + nf_n(X)Y^{n-1}$$

ونجد، بعد إشتقاق هذه العلاقة بالنسبة لِـ Y،

$$f''(X+Y) = 2f_2(X) + 3 \cdot 2f_3(X)Y + \dots + n(n-1)f_n(X)Y^{n-2}$$

وبمواصلة عمليات الإشتقاق، نجد

$$f^{(k)}(X+Y) = k!\,f_k(X) + (k+1)k \dots 2\,f_{k+1}(X)Y + \\ + \dots + n(n-1)\dots(n-k+1)\,f_n(X)Y^{n-k}$$

وبما أن العلاقة السابقة هي مساواة بين كثيري حدود للمتحولين X و Y وبأمثال في K، فإنها تبقى صحيحة إذا عوضنا X بـu و Y بِـv، حيث u و v عنصرين كيفيين من حلقة تبديلية L فوقية للحلقة K. وهكذا إذا عوضنا Y بِـO وتركنا X كما هو فنحصل على:

$$0 \leq k \leq n, f^{(k)}(X) = k!\, f_k(X)$$

إذن :

نظرية 4 – ليكن f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حلقة تبديلية K ؛ لتكن n درجة f و X و Y متحولين من K ، عندئذٍ :

$$f(X+Y) = f(X) + f'(X)Y + f_2(X)Y^2 + \dots + f_n(X)Y^n \tag{12}$$

حيث :

$$k!\, f_k(X) = f^{(k)}(X); 2 \leq k \leq n \tag{13}$$

وتعرف هذه النتيجة تحت إسم **دستور تايلور** : بما أنها مساواة بين كثيري حدود فيمكن تعويض X و Y بعنصرين من حلقة تبديلية فوقية للحلقة K ، وبصورة خاصة إذا كان x و h عنصرين من K ، فنرى أن :

$$f(x+h) = f(x) + f'(x)h + f_2(x)h^2 + \dots + f_n(x)h^n$$

حيث :

$f^{(k)}(x) = k!\, f_k(x)$ مهما كان x و h من K.

وإذا أخذنا $K = \mathbf{R}$ ، فنرى أن :

$$f_k(x) = \frac{f^{(k)}(x)}{k!}$$

بحيث يكون لدينا :

$$f(x+h) = f(x) + h\frac{f'(x)}{1!} + h^2\frac{f''(x)}{2!} + \dots + h^n\frac{f^{(n)}(x)}{n!}$$

وهو دستور تايلور المألوف ، وهكذا فإن لهذا الدستور ، إذا طبّقناه على التوابع المعرّفة بكثيرات حدود ، طبيعة جبرية بحتة .

مثال 2 – نأخذ $K = \mathbf{Z}$ و $f(X) = X^n$ ، عندئذٍ يكتب الدستوران (12) و (13) على الصورة :

$$(X+Y)^n = X^n + nX^{n-1}Y + f_2(X)Y^2 + \dots + f_n(X)Y^n$$

حيث :

$$k!\, f_k(X) = n(n-1)\dots(n-k+1)X^{n-k}$$

أو :

$$k\,![f_k(X) - \binom{n}{k}X^{n-k}] = 0 \text{ ؛ ؛}$$

وبما أن $\mathbf{Z}$ حلقة تامة ، فنحصل على :

$$f_k(X) = \binom{n}{k}X^{n-k}$$

بحيث يكون لدينا :

$$(X+Y)^n = \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n}{k}X^{n-k}\ Y^k$$

ولإستنتاج دستور ذي الحدّين (ف 8 رقم 4) فيكفي أن نلاحظ ما يلي : إذا كان f و g عنصرين من $\mathbf{Z}[X, Y]$ و $f = g$ ، فإن :

$$f(x, y) = g(x, y)$$

مهما كان x و y في حلقة تبديلية L .

6. ميّزة حقل تبديلي

نعتبر من جديد النظرية 4 . إن الدستور (12) لا تكون لهُ أهمية حقيقية إلاّ إذا كان بالإمكان حساب كثيرات الحدود f_k ، ويكون ضرورياً بالتالي مُحاولة إستنتاجها من (13) .

وبعبارة أخرى ، فإنه ينبغي حلّ المسألة التالية :

إذا كان $r \neq 0$ عدداً صحيحاً (في هذه الحالة نأخذ $k!$) و b عنصراً من K [نأخذ أحد أمثال كثير الحدود $f^{(k)}(X)$] ، نهدف البحث عن كل العناصر $x \in K$ بحيث :

$$r \cdot x = b$$

وبما أن :

$$r \cdot x = (r \cdot 1)x$$ ،

حيث 1 هو عنصر الوحدة في K ، فإنه يكفي أن يكون $r \cdot 1$ قابلاً للقلب حتى تقبل المسألة حلاً وحيداً. وإذا كان K حقلاً تبديلياً ، فإن الشرط يعني $r \cdot 1 \neq 0$.

وهكذا ، عندما يكون K حقلاً تبديلياً ، فإن المسألة ترجع إلى إعتبار المجموعة I المؤلفة من الأعداد الصحيحة r بحيث :

$$r \cdot 1 = 0$$ ؛

ونرى أن $0 \in I$ كما أنه إذا كان r و s في I فإن $r - s \in I$: أي أن I زمرة جزئية من $\mathbf{Z}$ ، وبالتالي (ف 7 ، مثال 8) فإنه يوجد عدد صحيح $p \geq 0$ وحيد بحيث $I = p\mathbf{Z}$ ونقول عن p أنه **ميزة الحقل** K .

يمكن تعريف ميزة حقل تبديلي K بأنها عدد طبيعي p يحقق ما يلي : إذا كان $r \cdot 1 = 0$ يستلزم $r = 0$ فإن $p = 0$ ، وإن لم يكن ذلك محققاً فإن p هو أصغر عدد صحيح موجب تماماً بحيث $p \cdot 1 = 0$. هذا وأنه لدينا في كل الأحوال النتيجة التالية : إن العلاقة $r \cdot 1 = 0$ تعني أن p يقسم r ، أو بعبارة أخرى إن الشرط اللازم والكافي للعلاقة $r \cdot 1 \neq 0$ هو أن r لا يقبل القسمة على ميزة K .

ونلاحظ أن ميزة حقل تبديلي تكون إمّا 0 إمّا عدداً أولياً . ولإثبات ذلك نفترض أن $p \neq 0$ هي ميزة حقل تبديلي K وليكن r و s صحيحين بحيث :

$$p = rs$$ ،

ونحصل منها على :

$$0 = p \cdot 1 = (r \cdot 1)(s \cdot 1)$$

وبما أن كل حقل تبديلي هو أيضاً حلقة تامة فنرى أن $r \cdot 1 = 0$ أو $s \cdot 1 = 0$ وفي كلتا الحالتين يكون هناك تناقض مع إفتراض p غير أولي .

إذا كان K حقلاً وميزته 0، فإنه من أجل كل $b \in K$ ومن أجل كل عدد صحيح $r \neq 0$، تقبل المعادلة :

$$r x = b$$

حلاً وحيداً في K، والحل هو :

$$x = (r \cdot 1)^{-1} b$$

الذي يكتب أيضاً على الشكل :

$$x = \frac{b}{r} = b/r$$

مثال 3 - إن ميزة الحقول $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{R}$ و $\mathbf{C}$ هي 0. وبصفة عامة، كل حقل فوقي للحقل $\mathbf{Q}$ له ميزة تساوي 0.

مثال 4 - نأخذ $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$، حيث p عدداً أولياً (ف 8، نظرية 1) ؛ من أجل كل عدد صحيح r فإن العلاقة $r \cdot 1 = 0$ في K تعني أن p يقسم r، أي أن $I = p\mathbf{Z}$ وبالتالي فإن p هي ميزة K.

ملاحظة 1 - ليكن K حقلاً و 0 ميّزته ؛ إن التطبيق

$$n \mapsto n \cdot 1$$

لـ $\mathbf{Z}$ في K ؛ متباين، وبالتالي يكون هذا التطبيق تشاكلاً لـ $\mathbf{Z}$ في حلقة جزئية من K. وفي الواقع، يمكن توسيع هذا التطبيق ليصبح تشاكلاً بين $\mathbf{Q}$ وحقل جزئي من K ؛ فإذا كان $x \in \mathbf{Q}$، وكتبنا $x = \frac{a}{b}$ حيث $a, b \in \mathbf{Z}$ مع $b \neq 0$، فإن

$$j(x) = (a \cdot 1)(b \cdot 1)^{-1}$$

ينتمي إلى K ويتعلق فقط بـ x وليس بكتابة $x = \frac{a}{b}$: بالفعل إذا كان :

$$\frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''}$$

فإننا نحصل على :

$$(a' \cdot 1)(b'' \cdot 1) = (a' \cdot 1)(b' \cdot 1)$$

وبالتالي :

$$(a' \cdot 1)(b' \cdot 1)^{-1} = (a'' \cdot 1)(b'' \cdot 1)^{-1}$$

هذا وأنه من السهل إثبات كون التطبيق j المعرّف آنفاً هو تشاكل لِـ $\mathbf{Q}$ على حقل جزئي من K .

نطابق عادة، في المجال العملي، كل عدد ناطق $x \in \mathbf{Q}$ مع صورته $j(x)$ في K بحيث يمكن إعتبار $\mathbf{Q}$ حقلاً جزئياً من كل حقل ذي ميزة 0 .

كما أنه يمكن إثبات أن كل حقل K ذي ميزة $p \neq 0$ يحتوي حقلاً جزئياً مشاكلاً لِـ $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ، وهو الحقل المؤلف من مضاعفات عنصر الوحدة في K ، أي العناصر $r \cdot 1$ ؛ $r \in \mathbf{Z}$ (أنظر التمرين 8) .

إذا كان K حقلاً ميزته 0، فإن دستور تايلور يأخذ الشكل التالي :

$$f(X+Y) = \sum_{k=0}^{k=n} f^{(k)}(X) \cdot \frac{Y^k}{k!} \tag{14}$$

وتبقى هذه النتيجة صحيحة في حالة الميزة $p \neq 0$ على شرط أن يكون $k! \cdot 1 \neq 0$ من أجل $k < n$ ، أي أن p لا يقسم أي عدد صحيح أصغر من n ، أي أن

$$n < p$$

7. رتبة جذور معادلة

لتكن K حلقة تبديلية و f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في K ؛ وليكن a عنصراً من K . ونقوم بتعويض X و Y في دستور تايلور :

$$f(X+Y) = f(X) + f'(X)Y + f_2(X)Y^2 + \ldots$$

بِـ a و $T-a$ على الترتيب، حيث T متحولاً في K ؛ ونحصل عندئذ على :

$$\begin{aligned} f(T) &= f(a) + f'(a) \cdot (T-a) + f_2(a) \cdot (T-a)^2 + \ldots \\ &= f(a) + (T-a)\, q(T) \end{aligned}$$

حيث $q \in K[T]$. إذا كان $g \in K[X]$ و $h \in K[X]$ فإننا نقول أن h **يقبل القسمة على** g ، إذا وجد $q \in K[X]$ بحيث $h = gq$. ومن النتيجة السابقة نستطيع الحصول على النص التالي (ف 28 ، توطئة 1) :

نظرية 5 - ليكن f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حلقة تبديلية K ؛ إن الشرط اللازم والكافي لكي يكون عنصر $a \in K$ جذراً لِـ f هو أن يكون $f(X)$ قابلاً للقسمة على $X - a$.

وبالفعل ، إذا كان a جذراً لِـ f ، فإن $f(a) = 0$ ونحصل ، حسب دستور تايلور ، على

$$f(T) = (T - a)\, q(T)$$

ومن ناحية عكسية ، تشير هذه العلاقة إلى أن :

$$f(a) = (a - a)\, q(a) = 0 \text{ ،}$$

وهو المطلوب .

إذا كان $a \in K$ جذراً لِـ f ، فإن رتبة a هي بالتعريف أكبر عدد صحيح r بحيث يكون $f(T)$ قابلاً للقسمة على $(T - a)^r$. وإذا كان $r = 1$ فنقول عن a أنه **جذر بسيط** ، ونقول عنه إنه جذر ثنائي إذا كان $r = 2$ ، الخ .

نظرية 6 - ليكن f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حلقة تبديلية K ؛ إنّ الشرط اللازم والكافي ليكون $a \in K$ جذراً بسيطاً لِـ f هو أن يكون لدينا :

$$f(a) = 0 \quad \text{و} \quad f'(a) \neq 0 \text{ .}$$

لنبرهن ذلك ؛ وليكن a جذراً لِـ f ، لدينا عندئذٍ :

$$f(T) = (T - a)\, q(T); \;\; q(T) = f'(a) + f_2(a) \cdot (T - a) + \dots$$

وبالتالي :

$$q(a) = f'(a) \text{ .}$$

فإذا كان $f'(a) = 0$ ، يكون $q(T)$ قابلاً للقسمة على $(T - a)$. (حسب النظرية 5) ، ومن ثم يكون f قابلاً للقسمة على $(T - a)^2$ بحيث يكون a غير بسيط . وإذا كان a غير بسيط ، فإنه يكون لدينا :

$$f(T) = (T - a)^2 g(T)$$

وبالتالي :

$$f'(T) = 2(T - a) g(T) + (T - a)^2 g'(T)$$

مما يثبت أن $f'(a) = 0$ ، وبهذا ينتهي البرهان .

نظرية 7 - ليكن f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حقل تبديلي K ميزته 0 . لأجل أن يكون عنصر $a \in K$ جذراً لِـ f بالرتبة r ، فإنه يلزم ويكفي أن تتحقق العلاقات :

$$f(a) = f'(a) = \dots = f^{(r-1)}(a) = 0 \text{ و } f^{(r)}(a) \neq 0 \qquad (15)$$

البرهان : نفترض أن a جذر مضاعف برتبة r ؛ يكون لدينا عندئذٍ :

$$f(T) = (T - a)^r g(T) \qquad (16)$$

حيث $g(a) \neq 0$ ، إذ أنه لو لم يكن كذلك (نظرية 5) فإن $g(T)$ يكون قابلاً للقسمة على $T - a$ وبالتالي يكون $f(T)$ قابلاً للقسمة على $(T - a)^{r+1}$. وبعد إشتقاق (16) k مرّة تحصل على علاقة من الشكل :

$$f^{(k)}(T) = r(r-1)\dots(r-k+1)(T - a)^{r-k} g(T) + (T - a)^{r-k+1} g_k(T)$$

حيث g_k كثير حدود ؛ ومن هذه العلاقة نرى أن $f^{(k)}(a) = 0$ من أجل $k \leq r - 1$ ، وبالإضافة إلى ذلك ، لدينا :

$$f^{(r)}(a) = r\,!\, g(a) \neq 0 \text{ ؛}$$

إذ أن $g(a) \neq 0$ وميزة K تساوي 0 .

لنفترض من ناحية عكسية أن الشروط (15) محققة ، وبما أن ميزة K هي صفر ، فإننا نستطيع كتابة :

$$f(T) = \sum_{k=0}^{k=n} (T - a)^k \cdot \frac{f^{(k)}(a)}{k\,!}$$

$$= (T - a)^r \left[\frac{f^{(r)}(a)}{r!} + (T - a) \frac{f^{(r+1)}(a)}{(r+1)!} + \dots \right]$$

وبعبارة أخرى، فإنه يكون لدينا:

$$f(T) = (T-a)^r \, g(T)$$

حيث $g(a) \neq 0$؛ وإذا كان f قابلاً للقسمة على $(T-a)^{r+1}$ فمن الواضح، نظراً لكون $K[X]$ حلقة تامة، أنَّ g يكون قابلاً للقسمة على $(T-a)$ وهذا مستحيل إذْ أنَّ $g(a) \neq 0$؛ وهكذا فإن $(T-a)^r$ هي أكبر قوة لِـ$(T-a)$ تقسم f وبالتالي فإن r هي رتبة الجذر a، وبذلك ينتهي البرهان.

مثال 5 – ليكن K حقلاً تبديلياً ميزته 0، وليكن المعادلة:

$$x^3 + px + q = 0$$

حيث p و q عنصرين من K، متى تقبل هذه المعادلة حلاً مضاعفاً a؟ حسب النظرية 6 فينبغي أن يكون لدينا:

$$a^3 + pa + q = 0$$
$$3a^2 + p = 0$$

وبضرب العلاقة الأولى بِـ3 والعلاقة الثانية بِـa وبالطرح نحصل على $2pa + 3q = 0$ أي

$$a = -\frac{3q}{2p}$$

وبالتعويض في $3a^2 + p = 0$، نجد

$$4p^3 + 27q^2 = 0$$

وإذا كانت، عكسياً، هذه العلاقة محققة فمن الواضح أنَّ $\frac{-3q}{2p}$ جذر ثنائي للمعادلة المدروسة.

يمكن للقارئ أن يتحقق من أن النتائج السابقة لا تشترط أن ميزة K تساوي 0 بل تشترط فقط أنها تختلف عن 2 وعن 3.

ف 31. الحلقات الرئيسية

كنّا قد عرّفنا (ف 8، مثال 10) الحلقة الرئيسية: هي حلقة تبديلية تامة بحيث كل مثاليّاتها رئيسية. وسنرى في الفصل القادم أنه إذا كان K حقلاً تبديلياً فإن $K[X]$ حلقة رئيسية. أمّا في هذا الفصل فسندرس بعض خواص الحساب في الحلقات الرئيسية، وتكون هذه الخواص تعمياً للخواص المتعلقة بالأعداد الصحيحة، كما أننا سنطبقها على كثيرات الحدود في الفصل القادم. وفي كل هذا الفصل نعتبر حلقة رئيسية K.

1. القاسم المشترك الأكبر (أو الأعظم)

لتكن K حلقة رئيسية وx_1، ...، x_n عناصراً من K؛ وليكن:

$$I = (x_1, ..., x_n)$$

المثالي(*) من K المولَّد عن x_1، ...، x_n. وبما أنَّ K رئيسية، فإن هذا المثالي يكون مولداً عن عنصر d وحيد بالمعنى التقريبي حيث يمكن تعويضه بـ ud مهما كان u قابل للقلب في K(**) (u يسمى وحدة في K).

نسمّي **قاسماً مشتركاً أكبر** لـ x_1، ...، x_n كل عنصر d من K بحيث:

(*) نأمل ألا يخلط القارئ $(x_1, x_1, ..., x_n)$ مع عنصر K^n الذي يرمز له بنفس الكتابة! إن الكتابة المذكورة هنا قد إستعملت في الحساب منذ زمن طويل.

(**) لنفترض $(d) = (d')$؛ يوجد عندئذٍ $u \in K$ و $v \in K$ بحيث $d' = ud$ و $d = vd'$، وبالتالي $d = vud$، إذا كان $d \neq 0$ فإننا نستنتج أن $vu = 1$ (لأن K تامة)، بحيث يكون u قابلاً للقلب.

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (d) \tag{1}$$

وَبما أن الطرف الأيسر هو المجموعة المؤلفة من العناصر $y \in K$ التي تكتب على الشكل :

$$y = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n \tag{2}$$

حيث u_1 ، ... ، u_n عناصراً من K ؛ فإننا نرى أنَّ d يَتميّز بالخاصية التالية : إن مجموعة العناصر التي تكتب على الشكل (2) هي بالتحديد المجموعة المؤلفة من مضاعفات d في K . وبصفة خاصة ، بما أن $d \in (d)$ ، نرى أنه توجد عناصر u_1 ، ... ، u_n من K بحيث يكون لدينا :

$$d = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n \tag{3}$$

وتسمى هذه العلاقة ، نظرية بيزوت .

ويُفسَّر الإصطلاح المستعمل لتعيين d بالنتيجة التالية : لِكَيْ يقسم عنصر من K كل العناصر x_1 ، ... ، x_n ، فإنه يلزم ويكفي أن يقسم d . إذ أن العلاقة (1) تشير إلى أنَّ المثالي (d) يحتوي كل x_i ، وتكون هذه الأخيرة مضاعفات لِـ d ، وبالتالي فإن كل قاسم لِـ d يقسم x_i ، مهما كان i . ومن ناحية عكسية ، إذا كان $m \in K$ قاسماً لكلِّ x_i ، فإنه يكون لدينا :

$$(1 \leq i \leq n) \ ; \ \ x_i = m y_i$$

وبالتعويض في (3) ، نرى

$$d = m(u_1 y_1 + \dots + u_n y_n)$$

وهذا يثبت أن m يقسم d .

مثال 1 - نأخذ $K = \mathbf{Z}$ (وهي حلقة رئيسية حسب ف 10 ، مثال 9) ولتكن الأعداد الصحيحة x_1 ، ... ، x_n . إن الطريقة «الطبيعية» أو «القانونية» لإختيار مولّد للمثالي $(x_1, \dots, x_n)$ هي أخذ المولّد الموجب لهذا المثالي . وعندئذٍ نحصل على المفهوم المألوف للقاسم المشترك الأكبر للجماعة $\{x_1$ ، ... ، $x_n\}$.

(أنظر المثال 8 من ف 7) .

2. العناصر الأولية في ما بينها (أو مع بعضها)

نقول عن عناصر x_1 ، … ، x_n أنها **أولية في ما بينها** إذا كان 1 هو قاسمها المشترك الأكبر.

نظرية 1 – إذا كانت x_1 ، … ، x_n ، عناصراً من حلقة رئيسية K ، فإن القضيات التالية متكافئة:

أ) العناصر x_1 ، … ، x_n أولية في ما بينها

ب) القواسم المشتركة لِـ x_1 ، … ، x_n هي بالتحديد عناصر K القابلة للقلب

ج) توجد في K عناصر u_1 ، … ، u_n بحيث.

$$1 = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$$

د) من أجل كل $y \in K$ ، فإنه توجد في K عناصر u_1 ، … ، u_n بحيث:

$$y = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n.$$

من الواضح أن أ) تكافؤ د) إذْ أنَّ أ) تعني:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) = (1) = K.$$

وإذا كانت العناصر x_i أولية فيما بينها، فإن قواسمها المشتركة هي قواسم 1، أي عناصر K القابلة للقلب، وعكسياً إذا كان كل قاسم مشترك للعناصر x_i قابلاً للقلب فإن القاسم (أو أحد القواسم) المشترك الأكبر هو أيضاً قابل للقلب، وبما أن مضاعفات عنصر قابل للقلب تؤلف الحلقة K ذاتها فإنه يكون لدينا $K = (x_1, \dots, x_n)$ وعندئذٍ يكون لدينا التكافؤ بين أ) و ب). أخيراً أ) تستلزم ب) حسب نظرية بيزوت و ج) تستلزم د) إذ أنَّ ج) تعني كون المثالي $(x_1, \dots x_n)$ يحتوي 1، وبالتالي يساوي K. وبهذا ينتهي البرهان.

إن النص ج) من النظرية 1 يساعد كثيراً في برهان بعض الخواص «المألوفة». نأخذ مثالاً لذلك:

نظرية 2 - ليكن x و y عنصرين من K غير معدومين و d قاسماً للجداء xy ، إذا كان d أولي مع x فإن d يقسم y .

البرهان : بما أن d أولي مع x فإنه يوجد u و v في K بحيث $ud + vx = 1$ ؛ وإذا ضربنا الطرفين بِـ y فنجد :

$$y = yud + vxy$$

ونرى عندئذٍ أن d يقسم y لأنه يقسم الطرف الأيمن من العلاقة .

3. المضاعف المشترك الأصغر

لتكن x_1 ، ... ، x_n عناصراً من K غير معدومة . إنَّ مضاعفات x_i تؤلف المثالي (x_i) ؛ وبالتالي فإنَّ المضاعفات المشتركة للجماعة $\{x_i\}$ هي عناصر المثالي $(x_n) \cap ... \cap (x_1)$. وبما أنَّ هذا الأخير رئيسي فيكون لدينا :

$$(x_1) \cap ... \cap (x_n) = (m) \tag{4}$$

ونسمي m **مضاعفاً مشتركاً أصغر للجماعة** x_1 ، ... ، x_n ، ونلاحظ أن ud هو أيضاً مضاعفاً مشتركاً أصغر لنفس الجماعة ، مهما كان u قابلاً للقلب في K . وتشير العلاقة (4) إلى أنَّ المضاعفات المشتركة للجماعة $\{x_i\}$ هي مضاعفات m .

نظرية 3 - إذا كان x و y عنصرين من K غير معدومين ، فإنه يكون لدينا :

$$x\,y = m\,d$$

حيث m هو مضاعفاً مشتركاً أصغر وd قاسماً مشتركاً أعظماً لِـ x و y .

ملاحظة 1 - بما أننا نستطيع تعويض d بِـ ud . و m بِـ vm ، حيث u و v قابلين للقلب في K ، فإن العلاقة :

$$xy = md$$

لا تكون صحيحة إلاّ إذا تمّ إختيار m و d بصورة مناسبة؛ وبذلك يمكن إعطاء مفهوم لنص النظرية.

لنبرهن الآن النظرية، ونضع:

$$x = x'd \text{ و } y = y'd$$

وليكن m' مضاعفاً مشتركاً أصغر (م.م.أ) لِـ x' و y'، من أجل $z \in K$، فإن الشرط اللازم والكافي ليكون z مضاعفاً لِـ x و y هو إمكانية كتابة:

$$z = z'd$$

حيث z' مضاعفاً مشتركاً لِـ x' و y'، أي مضاعفاً لِـ m'. وهكذا فإن المضاعفات المشتركة لِـ x و y هي مضاعفات $m'd$ وبالتالي فإنَّ هذا الأخير هو م.م.أ لِـ x و y. وبذلك فإن العلاقة التي نريد إثباتها، تكتب أيضاً $xy = m'd \cdot d$، وإذا إختصرنا بِـ d^2.

$$x'y' = m'$$

وتصبح عندئذٍ النظرية 3، نتيجة للتوطئتين التاليتين:

توطئة 1 - ليكن x و y عنصرين غير معدومين من K و d قاسماً مشتركاً أكبرَ لِـ x و y، ونضع $x = x'd$ و $y = y'd$، عندئذٍ يكون x' و y' أوليين في ما بينهما.

بالفعل، يوجد u و v في K بحيث $ux + vy = d$، وإذا إختصرنا بِـ d، نحصل على $ux' + vy' = 1$.

توطئة 2 - **إذا كان x و y أوليين في ما بينهما، فإن xy هو مضاعف مشترك أصغر لهما (أي أنَّ كل مضاعف مشترك لِـ x و y هو مضاعف لِـ xy).**

إذا كان m مضاعفاً مشتركاً لِـ x و y، نضع $m = xz$؛ ونرى أن y يقسم xz، وبما أنه أولي مع x فهو يقسم z (نظرية 2) وهذا يبرهن التوطئة

وبذلك نكون قد برهنا النظرية 3.

ويمكن تعميم التوطئة 2 على النحو التالي:

نظرية 4 - إذا كانت x_1، ...، x_n عناصراً من K غير معدومة وكل إثنين منها أوليين في ما بينهما فإن $x_1 x_2 \dots x_n$ هو مضاعف مشترك أصغر لـ x_1، ...، x_n.
نبرهن أوّلاً، بالتدريج بالنسبة لـ n، أنَّ x_n أولي مع الجداء $x_1 \dots x_{n-1}$. إذا كان $n = 2$ فإن ذلك ناتج عن إفتراضنا. نفترض إذن أننا قد برهنا كون x_n أولي مع $x_1 \dots x_{n-2}$، وليكن d قاسماً مشتركاً لـ x_n و $x_1 \dots x_{n-1}$؛ إن x_n أولي مع x_{n-1}، و d يقسم x_n، إذن d أولي مع x_{n-1}؛ وبما أنَّ d يقسم $x_1 \dots x_{n-2} x_{n-1}$ فإنه يقسم $x_1 \dots x_{n-2}$ (نظرية 2)؛ وبما أن x_n أولي مع $x_1 \dots x_{n-2}$ (حسب إفتراض التدريج)، فنرى أن d قابل للقلب، وهذا يثبت النص.

لنبرهن الآن النظرية 4، بالتدريج. إذا كان $n = 2$ فالنظرية هي ما تنص عليه التوطئة 2. نفترض أنَّ $n > 2$ وأن النظرية محققة من أجل $(n - 1)$ عنصر، وليكن m مضاعفاً مشتركاً للجماعة $\{x_i\}$، نرى من إفتراض التدريج أنَّ m مضاعف لـ $x_1 \dots x_{n-1}$ وأيضاً لـ x_n؛ وحسب الجزء الأول من البرهان فإن x_n أولي مع $x_1 \dots x_{n-1}$ وبالتالي فإن m مضاعف لجدائهما (حسب التوطئة 2)، وبهذا نكون قد أتممنا برهان النظرية 4.

4. وجود قواسم أولية

نقول عن عنصر $p \in K$ أنّه أولي أو **غير قابل للإختصار** أو **غير قابل للاختزال** أو أقصى (***) إذا كان من جهة غير قابل للقلب ومن جهة أخرى إذا كانت قواسمه الوحيدة هي العناصر up حيث u قابل للقلب.

وفي الحالة $K = \mathbf{Z}$ نجد المفهوم المألوف للأعداد الأولية، ونعلم أن كل

(***) يستعمل الإصطلاح الأول بالنسبة لـ $\mathbf{Z}$، أما الثاني فيستعمل في حلقات كثيرات الحدود، والثالث في الحلقات الرئيسية عامة.

$x \in \mathbf{Z}$ يمكن كتابته على شكل جداء أعداد أولية ؛ ونهدف الآن تعميم ذلك بالنسبة للحلقات الرئيسية.

نظرية 5 - لتكن K حلقة رئيسية، كل عنصر غير معدوم من K هو جداء عنصر قابل للقلب وعناصر قصوى في K. وبتعبير آخر: كل $x \in K$ غير معدوم وغير قابل للقلب هو جداء لعناصر قصوى في K.

نلاحظ أن عنصراً ما قابلاً للقلب لا يمكن تجزئته إلى جداء عناصر قصوى إذْ أنَّ قواسمه تكون قابلة للقلب وبالتالي غير قصوى

لبرهان النظرية 5، نلاحظ أولاً أن كل حلقة رئيسية هي حتماً نوثرية: كل مثالياتها من صنف منته. وبالتالي (ف 18، نظرية 4 أو الملاحظة 2 القادمة) تكون لدينا النتيجة التالية:

توطئة 3 - لتكن X مجموعة غير خالية مؤلفة من بعض (أو كلّ) مثاليات حلقة رئيسية K ؛ عندئذٍ فإن X تقبل عنصراً أعظمياً، على الأقل، أي أنه يوجد $I \in X$ غير محتوى في أي $J \in X$ حيث $J \neq I$.

بعد هذا التذكير، نبرهن الآن النظرية 5 بطريقة التناقض. ولتكن X مجموعة مثاليات K التي هي من الشكل $I = (x)$ حيث x عنصراً من K غير معدوم ولا يقبل أي تجزئة إلى جداء عنصر قابل للقلب وعناصر قصوى من K: إذا برهنا أنَّ X مجموعة خالية فذلك يعني أننا برهنا النظرية 5. لنفترض أنَّ X غير خالية وليكن (a) عنصراً أعظمياً منها. إن العنصر a لا يقبل تجزئة إلى جداء عنصر قابل للقلب وعناصر قصوى، ويكون بالتالي غير قابل للقلب وغير أقصى. وعندئذٍ فإننا نستطيع كتابة $a = bc$ حيث كل من b و c غير قابلاً للقلب؛ وهكذا فإن كل من (b) و (c) يحتوي تماماً (a)، وبما أن (a) أعظمي في X فنرى أن (b) و (c) لا ينتميان إلى X وبالتالي فإن كل من b و c يحقق النظرية 5 وبالتالي فإن a، جداءهما، يحقق أيضاً النظرية، على عكس ما إفترضناه من أن $(a) \in X$، وبهذا ينتهي البرهان.

ملاحظة 2 - إذا كان $K = \mathbf{Z}$، فإننا نستطيع الإستغناء عن التوطئة، مع العلم أن البرهان المـألوف للنتيجة المذكورة يعتمد ضمنياً على تلك التوطئة:

نعتبر أصغر عدد طبيعي $a > 0$ غير قابل للتجزئة إلى عوامل أولية ، إذا وجد مثل هذا العدد ، ثم نلاحظ أن a حتماً غير أولي وبالتالي فإن $a = bc$ حيث $a > b > 0$ و $a > c > 0$ بحيث يمكن تجزئة كل من b و c إلى عوامل أولية وكذلك الشأن بالنسبة لجداءهما a ؛ ومن الواضح أن برهان الحالة العامة موحى من البرهان السابق . وسنرى في الفصل القادم أنه يمكن أيضاً الإستغناء عن التوطئة 3 عندما يكون $K = L[X]$ حيث L حقلاً .

ونذكر القارئ أن برهان التوطئة 3 بسيط ويمكن الحصول عليه كما يلي إذا كانت التوطئة 3 غير صحيحة ، فيمكن ، إنطلاقاً من $I_1 \in X$ كيفي ، إنشاء $I_2 \in X$ بحيث I_2 يحتوي تماماً I_1 ثم إنشاء I_3 بحيث يحتوي تماماً I_2 وهلم جرا . الآن ، إذا كانت لدينا متتالية متصاعدة من مثاليات K

$$I_1 \subset I_2 \subset ... \subset I_n \subset ...$$

فإنها حتماً مستقرة ، أي أنه يوجد عدد طبيعي r بحيث :

$$I_n = I_r \quad \text{من أجل كل} \quad n \geq r$$

إذ أن I ، إتحاد كل المثاليات I_k السابقة ، هو أيضاً مثالي ، وبما أن K حلقة رئيسية فإن $I = (x)$ من أجل $x \in K$ ، وبما أن x ينتمي إلى اتحاد الجماعة $\{I_k\}$ فإنه يوجد r بحيث $x \in I_r$ ؛ وهكذا فإنه يكون لدينا :

$$I_r \subset I_n \subset I \subset I_r$$

وبالتالي $I_n = I_r$. وبهذا نكون قد برهنا التوطئة .

5. خواص العناصر القصوى

تحتوي النتيجة التالية عدة أوصاف مفيدة للعناصر القصوى (بما فيها تعريف هذه العناصر) .

نظرية 6 – ليكن p عنصراً من حلقة رئيسية K غير معدوم وغير قابل للقلب . إنّ الخواص التالية متكافئة :

أ) p عنصر أقصى ؛

ب) كل قاسم لِـ p يكون إما قابلاً للقلب أو على الشكل pu حيث u قابل للقلب ؛

ج) المثالي $I = (p)$ أعظمي (أي $I \neq K$ والمثاليان الوحيدان الذان يحتويان I هما K و I)

د) إذا كان p يقسم جداء من عناصر K ، فإنه يقسم أحد عوامل هذا الجداء على الأقل.

إن تكافؤ أ) و ب) هو بالتحديد تعريف العناصر القصوى لنبرهن تكافؤ ب) و ج) وليكن J مثالياً يحتوي I ؛ بما أنَّ K رئيسية فإن $J = (x)$ من أجل x أحد عناصر K ، وقَوْلنا أن J يحتوي I ، يعني أن x يقسم p ؛ كما أن $J = K$ تعني أنَّ x قابل للقلب ، و $J = I$ تعني أن $x = pu$ حيث u قابل للقلب ؛ من هذه الملاحظات نحصل على التكافؤ بين ب) وج) .

بقي الآن برهان التكافؤ بين النصوص الثلاث الأولى مع النص د) . ليكن p عنصراً أقصى و x_1 ، ... ، x_n عناصر من K غير معدومة ، بحيث p يقسم الجداء $x_1.x_2 \dots x_n$ ؛ ونهدف برهان كون p يقسم على الأقل أحد العناصر x_i . لنكتب :

$$x_1 \dots x_n = (x_1 \dots x_{n-1})x_n \text{ ،}$$

وَبالتدريج نرى أن المسألة ترجع إلى الحالة $n = 2$ ؛ وبتعبير آخر ، يكفي أن نبرهن أنه إذا كان p يقسم xy فإن p يقسم x أو y . وحسب النظرية 2 فإن المسألة تصبح : مهما كان $x \neq 0$ فإمَّا أن p يقسم x أو أن p أولي مع x ؛ ولـكن إذا إعتبرنا المثالي (p, x) المولد عن p و x ، فإننا نرى أنه يحتوي (p) ؛ وحسب النص ج) من النظرية 6 الحالية (وقد برهنا هذا النص) فإنه لا تكون لدينا سوى حالتين : إما :

$$(p, x) = K$$

وعندئذٍ يكون p و x أوليين مع بعضهما ، وإمَّا :

$$(p, x) = (p)$$

وعند ذلك يكون x مضاعفاً لـ p. وبذلك نكون قد برهنا أن كل عنصر أقصى يحقق النص د). لنبرهن أخيراً العكس، وليكن p عنصراً من K غير معدوم وغير قابل للقلب ونفترض أن p يحقق د). حسب النظرية 5، فإن هذا العنصر يكتب على الشكل:

$$p = p_1 \dots p_n$$

حيث p_i عناصر قصوى؛ وإعتماداً على د) فإن p يقسم أحدها على الأقل، ولكن p_i عنصر أقصى و p غير قابل للقلب، إذن $p = up_i$ حيث u قابل للقلب، وبالتالي يكون p عنصرا أقصى، وبهذا ينتهي البرهان.

نتيجة - لتكن x، y_1، ...، y_n عناصر غير معدومة من حلقة رئيسية K، ونفترض أن x أولي مع y_i مهما كان i. إذن x أولي مع الجداء $y_1 \dots y_n$.

لهذه الغاية نفترض وجود قاسم مشترك d لـ x و $y_1 \dots y_n$، وأن d غير قابل للقلب. عندئذٍ يكون d جداء لعناصر قصوى، وبالتالي مضاعفاً لعنصر أقصى على الأقل؛ يوجد إذن عنصر أقصى p قاسم لـ x و $y_1 \dots y_n$ في نفس الوقت؛ أو حسب النص د) من النظرية 6، فإنه يوجد i بحيث p يقسم y_i، مما يناقض أنّ x أولي y_i؛ وبهذا ينتهي البرهان.

نلاحظ أخيراً أنه لا يمكن تبسيط البراهين السابقة إذا أخذنا $K = \mathbf{Z}$.

6. وحدانية التجزئة إلى عوامل أولية.

نقول عن عنصرين قصويين p' و p'' من K أنهما **مترافقان** إذا وجد عنصر u من K، قابل للقلب، بحيث $p'' = up'$، ومعنى هذا أن المثالي (p') والمثالي (p'') متساويان. وإذا كان $K = \mathbf{Z}$ فمعنى ذلك أن:

$$p'' = \pm p'.$$

نظرية 7 - ليكن x عنصراً من حلقة رئيسية K، غير معدوم وغير قابل للقلب، ولتكن تجزئتان لـ x كجداء عناصر قصوى في K:

$$x = p'_1 \dots p'_m = p''_1 \dots p''_n$$

يكون لدينا عندئذٍ $m = n$ ، ويوجد تبديل σ للأدلة $1, 2, ..., n$ بحيث مهما كان $1 \leq i \leq n$ ، فإنَّ p'_i $p''_{\sigma(i)}$ يكونان مترافقين.

وبعبارة أخرى ، إذا كانت لدينا تجزئة ما ، فإنه يمكن الحصول على كل التجزئات الأخرى بواسطة عمليات بديهية وهي : (1) تغيير ترتيب الحدود (2) ضرب كل عامل أقصى بعنصر قابل للقلب من K (وتُختار هذه العناصر بحيث يكون جداءوها يساوي 1) . وإذا كان $K = \mathbf{Z}$ فنقتصر عادة على الأعداد الأولية الموجبة مما يُبعد (2)، إذ أنه في هذه الحالة ، من أجل كل عنصر أقصى p فإن $-p$ هو مرافقه الوحيد.

لنبرهن الآن النظرية 7 ، ونعتبر العلاقة :

$$p'_1 \dots p'_m = p''_1 \dots p''_n \tag{5}$$

p'_1 عنصر أقصى ويقسم الطرف الأيمن ، فهو يقسم إذن p''_j من أجل إحدى القيم $1 \leq j \leq n$ على الأقل؛ وبتغيير ترتيب الطرف الأيمن يمكن أن نفترض أن p'_1 يقسم p''_1 ؛ وبما أن p''_1 أولي فإنه يكون لدينا :

$$p''_1 = u_1 \, p'_1$$

حيث u_1 قابل للقلب؛ وإذا اختصرنا بِـ p'_1 العلاقة (5) . نجد

$$p'_2 \dots p'_m = u'_1 \, p''_2 \dots p''_n \text{ ؛}$$

وبمواصلة نفس طريقة البرهان نرى أن :

$$p''_2 = u_2 \, p'_2$$

حيث u_2 قابل للقلب ، وهكذا يمكن الوصول إلى برهان النظرية 7 (على القارئ الراغب في إتمام البرهان ، عليه إستعمال طريقة التدريج بالنسبة لِـ m) .

وفي المجال التطبيقي ، نكتب عادة التجزئتان إلى عوامل قصوى ، بالطريقة الآتية : نبدأ أولاً باختيار مجموعة P مؤلفة من عناصر قصوى من K ومتمتعة بالخاصية التالية : من أجل كل عنصر p أقصى في K ، فإنه يوجد عنصر وحيد $p' \in P$ مرافق لِـ p (ولإنشاء مجموعة P من هذا النوع ، فإنه

يكفي، حسب النظرية 6، ج)، إختيار مجموعة مثاليات K الأعظمية ثم إختيار، مرّة واحدة، مولد لكل من هذه المثاليات؛ وإذ كان $K = \mathbf{Z}$ فنختار، بالنسبة لكل مثالي أعظمي I، العدد الأولي الموجب الذي يولد I).

ليكن إذن تجزئة $x \in K$، حيث x غير قابل للقلب، إلى جداء عناصر قصوى:

$$x = p'_1 \dots p'_n$$

عندئذٍ، من أجل كل i، فإننا نستطيع كتابة $p'_i = u_i \, p_i$ حيث $p_i \in P$ و u_i قابل للقلب، وبالتالي:

$$x = u \, p_1 \dots p_n \tag{6}$$

حيث $p_i \in P$ مهما كان $1 \leq i \leq n$ و u قابل للقلب؛ وهكذا، فإن التجزئة (6) تكون وحيدة دون اعتبار ترتيب عواملها (إذ لا يمكن لعنصرين من P أن يكونا مترافقين إن لم يكونا متساويين).

وقد يحصل طبعاً تكراراً عنصر من P مرتين أو أكثر في التجزئة (6)؛ فإذا أجمعنا معاً العوامل المتساوية فإن التجزئة تكتب على الشكل:

$$x = u \, p_1^{n_1} \dots p_2^{n_r} \tag{7}$$

حيث p_1، ...، p_r عناصر من P و n_1، ...، n_r قوى موجبة. هذا وأنه يمكن كتابة تلك النتيجة بصورة أوضح: نعتبر، من أجل كل $p \in P$، عدد عوامل (6) التي تساوي p (ويمكن أن يكون هذا العدد منعدماً)، ونرمز لهذا العدد:

$$\nu_p(x)$$

ومن الواضح أن:

$$\nu_p(x) = 0 \ \text{من أجل كل} \ p \in P \ \text{تقريباً} \tag{8}$$

أي أن $\nu_p(x)$ لا تكون ≥ 1 الا بالنسبة لعدد منته من عناصر P.

هذا وأنه يمكن كتابة التجزئة (7) على الشكل

$$x = u \cdot \prod_{p \in P} p^{\nu_p(x)} \tag{9}$$

حيث يحتوي الطرف الأيمن عدد غير منته من العوامل، لكن حسب العلاقة (8)، لدينا:

$$p^{\nu_p(x)} = 1 \quad \text{من أجل كل} \quad p \in P \quad \text{تقريباً}$$

بحيث لا يحتوي الجداء (9) إلا عدداً منتهياً من العوامل المختلفة عن 1.

7. حساب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر بواسطة التجزئة إلى عوامل أولية

إن التجزئة (9) تعطي صورة بسيطة لخواص قابلية القسمة في الحلقة K. وتوضح ذلك النتيجة التالية:

توطئة 4 - ليكن x و y عنصرين غير معدومين، من K. إن الشرط اللازم والكافي لكي يقسم x العنصر y، هو أن يكون لدينا من أجل كل $p \in P$،

$$\nu_p(x) \leq \nu_p(y)$$

إذا تحقق الشرط المذكور، فإنه يكون لدينا:

$$x = u' \prod p^{\nu_p(x)}$$

$$y = u'' \prod p^{\nu_p(x)+n_p}$$

من أجل أعداد صحيحة:

$$n_p = \nu_p(y) - \nu_p(x)$$

كلها موجبة وكلها معدومة تقريباً، وينتج عن ذلك أن $y = xz$ حيث:

$$z = u'^{-1} u'' \prod p^{n_p}.$$

وعكسيًا، إذا إفترضنا $y = xz$ وإعتماداً على تجزئة كل من x و z إلى عوامل أولية، فإنه يكون لدينا:

$$y = u \prod p^{\nu_p(x)+\nu_p(z)}$$

حيث $u \in K$ قابل للقلب ، وبما أن تجزئة y ، إلى عوامل أولية ، وحيدة فإننا نحصل على $\nu_p(y) = \nu_p(x) + \nu_p(z)$ ، ويكون لدينا بالتالي $\nu_p(x) \leq \nu_p(y)$ مهما كان $p \in P$ ، وبهذا ينتهي برهان التوطئة 4 .

إذا كان لدينا عنصرين x و y من K غير معدومين ، فإنه من السهل ، إعتماداً على التوطئة 4 ، إنشاء قاسمهما المشترك الأكبر ومضاعفهما المشترك الأصغر . فإذا كان d هو قاسماً مشتركاً أكبر لـ x و y ، فإن قواسم x و y هي قواسم d ؛ وحسب التوطئة 4 ، فإن قواسم x و y هي العناصر $z \in K$ التي تحقق :

$$\nu_p(z) \leq \nu_p(y) \quad \text{و} \quad \nu_p(z) \leq \nu_p(x) ،$$

أو بعبارة أخرى :

$$\nu_p(z) \leq \text{Min}\,[\nu_p(x), \nu_p(y)] \tag{10}$$

من أجل كل $p \in P$ ؛ كما أن قواسم d هي العناصر $z \in K$ التي تحقق :

$$\nu_p(z) \leq \nu_p(d) \tag{11}$$

من أجل كل $p \in P$. وهكذا فإن d يكون قاسماً مشتركاً أكبر إذا وإذا فقط كان الشرطان (10) و (11) متكافئين ، أي أن يكون لدينا :

$$\nu_p(d) = \text{Min}\,[\nu_p(x), \nu_p(y)] \tag{12}$$

من أجل كل $p \in P$ ، ونحصل بذلك على القاعدة المألوفة : إن قوة p في تجزئة d هي أصغر قوة p في تجزئتي x و y .

وبطريقة مماثلة ، يمكن أن نرى أن كل م.م.أ. m لـ x و y يكون معرّفا بالعلاقة :

$$\nu_p(m) = \text{Max}\,[\nu_p(x), \nu_p(y)] \tag{13}$$

من أجل كل $p \in P$. وبعبارة أخرى فإن القواعد المألوفة في الحلقة **Z** ، تُعمّم إلى كل حلقة رئسية ببراهين مماثلة .

ملاحظة 3 - نلاحظ أن كل جداء من الصنف :

$$\prod_{p \in P} p^{n_p}$$

ليس له معنى في K إلا إذا كانت كل القوى n_p منعدمة تقريباً وموجبة. وإذا أردنا إستخدام (12) و (13) لحساب القاسم المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر لـ x و y، فإنه ينبغي التأكد من أن الطرف الأيمن لكل من العلاقتين المذكورتين يحقق الشروط المشار اليها. ويمكن إثبات ذلك على النحو التالي: إذا كانت X مجموعة عناصر P التي تحقق $\nu_p(x) \neq 0$ و Y مجموعة عناصر P التي تحقق $\nu_p(y) \neq 0$ فإننا نرى أن X و Y منتهيتين، ومنه فإن $Z = X \cup Y$ منتهية، وإذا كان $p \notin Z$، نرى أن:

$$\nu_p(x) = \nu_p(y) = 0 \text{ ،}$$

وبالتالي:

$$\text{Max}\,[\nu_p(x), \nu_p(y)] = \text{Min}\,[\nu_p(x), \nu_p(y)] = 0$$

وهو المطلوب.

8. تجزئة كسور حلقة رئيسية إلى أجزاء بسيطة.

لتكن K حلقة رئيسية و F حقل كسورها كما عرفناه في ف 29. ليكن x عنصراً من F:

$$x = a/b \quad \text{حيث} \quad a, b \in K \text{ و } b \neq 0 \text{؛}$$

وإذا واصلنا استخدام الرّموز التي استعملنا في الفقرة السابقة فإنه يكون بإمكاننا كتابة:

$$b = v \prod_{p \in P} p^{\nu_p(b)} \text{ ،} \quad a = u \prod_{p \in P} p^{\nu_p(a)}$$

وبالتالي:

$$x = \omega \prod_{p \in P} p^{\nu_p(x)} \tag{14}$$

حيث ω عنصراً من K قابل للقلب و

$$\nu_p(x) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$$

أعداداً صحيحة منعدمة تقريباً وقد تكون إشارتها موجبة أو سالبة. ونترك للقارئ أن يثبت كتمرين أن تجزئة x على الشكل (14) وحيدة.

نهدف الآن إثبات أن كل عنصر من F يقبل تجزئة من نوع آخر، وتكون نتيجتنا التالية مهمة في التحليل (حساب التكامل) لكن دون فائدة كبرى في الميادين الأخرى.

نظرية 8 - ليكن:

$$x = \frac{a}{p_1^{r_1} \dots p_n^{r_n}}$$

عنصراً من F، نفترض أنّ $a \in K$ و r_i أعداد صحيحة موجبة و $p_i \in K$ عناصر قصوى كل إثنان منها غير مترافقين. توجد عندئذٍ عناصر a_1، ...، a_n من K. بحيث:

$$x = \frac{a_1}{p_1^{r_1}} + \dots + \frac{a_n}{p_n^{r_n}}$$

وبعبارة أخرى، يمكن كتابة كل عنصر من F على شكل مجموع كسور من الصنف a/p^n حيث $a \in K$ و p أقصى و $0 \leq n$.

مثال 2 - نأخذ $K = \mathbf{Z}$ و:

$$x = 5/2 \cdot 3^2$$

فيكون لدينا:

$$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{9}$$

وهو النظرية 8 في هذا الحالة.

إن النظرية هي نتيجة للتوطئتين التاليتين:

توطئة 5 - نفترض أن:

$$x = a/ b_1 \dots b_n$$

حيث كل إثنين من العناصر b_i أوليين مع بعضهما . توجد عندئذٍ عناصر $a_i \in K$ بحيث :

$$x = a_1/b_1 + \ldots + a_n/b_n.$$

توطئة 6 – إذا كانت p_1 ، ... ، p_n عناصراً قصوى من K كل إثنين منها غير مترافقين . عندئذٍ فإن كل إثنين من العناصر :

$$b_n = p_n^{r_n} , \ldots, b_1 = p_1^{r_1}$$

أوليين مع بعضهما ، مهما كانت الأعداد الصحيحة الموجبة r_1 ، ... ، r_n .

نبدأ ببرهان التوطنة 6 ؛ وليكن d قاسماً مشتركاً لِـ b_i و b_j $(i \neq j)$ ؛ إذا كان d غير قابل للقلب فإنه يقبل قاسماً أولياً p ، بحيث p يقسم b_i و b_j ؛ وهكذا فإن p يقسم p_j إذا أنَّ :

$$b_j = p_j^{r_j} = p_j \ldots p_j \text{ و } b_i = p_i^{r_i} = p_i \ldots p_i$$

ومنه فإن b_i و b_j أوليان مع بعضهما .

لنبرهن الآن التوطئة 5 ، ونبدأ بالحالة $n = 2$. وبما أنَّ b_1 أولي مع b_2 فإنه يوجد $u_1, u_2 \in K$ بحيث :

$$u_1 b_1 + u_2 b_2 = 1$$

ومنه ،

$$\frac{a}{b_1 b_2} = \frac{a(u_1 b_1 + u_2 b_2)}{b_1 b_2} = \frac{a u_1}{b_2} + \frac{a u_2}{b_1}$$

وهذا يثبت التوطئة 5 في الحالة $n = 2$. لنبرهن الآن الحالة العامة بالتدريج بالنسبة لِـ n ، وحسب النظرية 6 ، نرى أن b_n أولي مع $b_1 \ldots b_{n-1}$ ، وبما أن التوطئة صحيحة بالنسبة لجداء مؤلف من عاملين ، فبإمكاننا كتابة :

$$x = \frac{a'}{b_1 \ldots b_{n-1}} + \frac{a_n}{b_n}$$

وعند ذلك يكفي تطبيق إفتراض التدريج على الكسر الأول من الطرف الأيمن وبذلك نحصل على تجزئة x المطلوبة .

ف 32. قسمة كثيرات الحدود

1. قسمة كثيرات الحدود ذات متحول واحد

ليكن

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots$$

كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حلقة تبديلية K ؛ إن معامل الحد ذي أعلى درجة في f يُسمَّى **معامل f الأساسي** (وهذا يفترض كون $f \neq 0$) ؛ وإذا كانت n هي درجة f فإنّ معامل f الأساسي هو معامل X^n . ونقول عن f أنه واحدي إذا كان معامله الأساسي عنصراً قابلاً للقلب في K ؛ وإذا كان K حقلاً فإن كل كثير حدود $f \neq 0$ يكون واحدياً .

إن النتيجة التالية تشابه نظرية قسمة الأعداد الصحيحة (مع الباقي) .

نظرية 1 – لتكن K حلقة تبديلية و g كثير حدود واحدي لمتحول واحد وبأمثال في K . من أجل كل كثير حدود $f \in K[X]$ ، يوجد كثيرا حدود q و r في $K[X]$ بحيث

$$f = g q + r \text{ ؛ } d^\circ(r) < d^\circ(g) \qquad (1)$$

وأن q و r وحيدان .

نفترض إذن أن

$$g(X) = b_0 + b_1 X + \ldots + b_n X^n$$

حيث b_n قابل للقلب ؛ وإذا ضربنا طرفي العلاقة (1) بـ $b_n^{-1} \in K$ فإننا نستطيع الإكتفاء بأخذ

$$g(X) = X^n + b_{n-1} X^{n-1} + \dots + b_0 \cdot \quad (2)$$

من أجل f معطى و q متغيّر، نعتبر كل كثيرات الحدود من الشكل $f - gq$؛ ومن الواضح أن درجاتها هي أعداد صحيحة موجبة أو الرمز $-\infty$ (وتحدث الحالة الأخيرة عندما يكون f مضاعفاً لـ g، وعندئذٍ فإن النظرية 1 تكون بديهية !)؛ وبالتالي فإنه يُمكن اختيار q بحيث تكون درجة $f - gq$ أصغرية؛ فيكون لدينا

$$d°(f - gq) \leq d°(f - gq') \quad (3)$$

من أجل كل كثير حدود $q' \in K[X]$. وعندئذٍ نضع

$$f = gq + r \quad (4)$$

وتعود كل المسألة إلى برهان

$$d°(r) < d°(g) \cdot \quad (5)$$

لنفترض إذن أن العلاقة السابقة غير محققة، ونضع

$$r(X) = c_{n+k} X^{n+k} + c_{n+k-1} X^{n+k-1} + \dots$$

حيث $c_{n+k} \neq 0$ و $k \geq 1$؛ من الواضح أن c_{n+k} هو المعامل الأساسي لكل من r وكثير الحدود

$$c_{n+k} X^k g(X) \text{ ؛}$$

ويُمكننا بالتالي كتابة

$$r(X) = c_{n+k} X^h_g(X) + r'(X) \text{ حيث } d(r') < d°(r) \quad (6)$$

وعندئذٍ فإن (4) تُصبح

$$f(X) = [q(X) + c_{n+k} X^k] g(X) + r'(X) \text{ ؛}$$

وإذا وضعنا

$$q'(X) = q(X) + c_{n+k} X^k \text{ ،}$$

فإننا نحصل على

$$f = gq' + r' \text{ مع } d°(r') < d°(r) \text{ ؛}$$

وتُكتب العلاقة السابقة أيضاً على الشكل $d^\circ(f - g\,q) > d^\circ(f - g\,q')$
وهذا يُناقض (3) ويُثبت بالتالي (5).

وهكذا نكون قد برهنا وجود q و r بحيث تكون (1) مُحققة؛ ويبقى إثبات وحدانيتهما. فإذا كان لدينا

$$f = g\,q_1 + r_1 = g\,q_2 + r_2$$

حيث

$$d^\circ(r_1) < d^\circ(g) \text{ ؛ } d^\circ(r_2) < g \qquad (7)$$

فإننا نحصل على

$$g(q_1 - q_2) = r_2 - r_1. \qquad (8)$$

وبذلك تعود المسألة إلى برهان كون $q_1 = q_2$؛ ولكن، حسب (7) $d^\circ(r_2 - r_1) < d^\circ g$؛ ومنه فإن العلاقة $q_1 - q_2 = 0$ تكون نتيجة للتوطئة التالية:

توطئة 1 - إذا كان g كثير حدود واحدي و q كثير حدود غير مُنعدم فإنه يكون لدينا

$$d^\circ(g\,q) = d^\circ g + d^\circ q \geq d^\circ g.$$

إذا وضعنا

$$g(X) = b_n X^n + \ldots + b_0 \text{ و } q(X) = c_m X^m + \ldots + c_0$$

حيث b_n قابل للقلب و c_m غير منعدم، فإننا نرى أن $b_n c_m$ هو معامل X^{m+n} في $g\,q$؛ وبما أنّ b_n قابل للقلب فإن الجداء المذكور غير مُنعدم إذ إن $c_m \neq 0$، وتنتج التوطئة عن ذلك.

وبذلك ينتهي أيضاً برهان النظرية 1. ونُلاحظ أن هذه النظرية، إذا كان K حقلاً، تكون مُحققة من أجل كل $g \neq 0$.

هذا وإن q يُسمى **خارج قسمة f على g** ويُسمى r **باقي القسمة المذكورة**. ويعطي برهان النظرية 1 طريقة لحساب g و r بصورة عملية. نضع، من أجل ذلك،

$$f(X) = a_m X^m + \ldots + a_0 \text{ و } g(X) = b_n X^n + \ldots + b_0$$

حيث a_m غير منعدم و b_n قابل للقلب وإذا كان $m < n$ فإن عملية القسمة تكون تافهة وتعطي $q = 0$ و $r = f$ ؛ أما إذا كان $m \geq n$ فإنه يكون لدينا

$$f(X) = a_m b_n^{-1} X^{m-n} g(X) + f_1(X) = c_k X^k g(X) + f_1(X) \quad (9)$$

حيث

$$d^\circ(f_1) \leq d^\circ(f) - 1 \text{ ؛}$$

وإذا كانت درجة f_1 أصغر من درجة g ، فنكون قد أتممنا العملية ، أي ، يكون لدينا في هذه الحالة

$$q(X) = a_m b_n^{-1} X^{m-n} \text{ و } r(X) = f_1(X)$$

أمّا إذا كان $d^\circ(f_1) \geq d^\circ(g)$ ، فإننا نقوم بنفس العملية السابقة ولكن بالنسبة لـ f_1 بدلاً عن f ، ونكتب

$$f_1(X) = c_h X^h g(X) + f_2(X) \quad (10)$$

حيث

$d^\circ(f_2) < d^\circ(f_1)$ ؛ ومن (9) و (10) نحصل على

$$f(X) = (c_k X^k + c_h X^h) g(X) + f_2(X) \text{ ؛ } d^\circ(f_2) \leq d^\circ(f) - 2 \text{ ؛}$$

وإذا كان $d^\circ f_2 < d^\circ g$ فإن المسألة قد حُلّت ؛ وإن لم يكن كذلك . فنكتب

$$f_2(X) = c_l X^l g(X) + f_3(X)$$

حيث

$$d^\circ(f_3) < d^\circ(f_2) \text{ ،}$$

ومنه ،

$$f(X) = (c_k X^k + c_h X^h + c_l X^l) g(X) + f_3(X)$$

حيث

$$d^\circ(f_3) \leq d^\circ(f) - 3 \text{ ؛}$$

ومن الواضح أن هذه العملية تمكننا من الحصول على خارج وباقي قسمة f على g .

مثال 1 - نأخذ $f(X) = X^6 - X^4 - X^2 + 1$ و $g(X) = X^3 - 1$ ونرتب العمليات على النحو التالي :

$$
\begin{array}{llll|l}
X^6 - X^4 & & - X^2 & +1 & X^3 - 1 \\ \cline{5-5}
& - X^4 + X^3 & - X^2 & +1 & X^3 - X + 1 \\
& X^3 & - X^2 - X & +1 & \\
& & - X^2 - X & +2 &
\end{array}
$$

ويكون هنا $X^3 - X + 1$ هو خارج القسمة و $- X^2 - X + 2$ هو الباقي .
ونرى ان الطريقة المستعملة هي نفس الطريقة لقسمة الأعداد الصحيحة .

2. مثاليات حلقة كثيرات الحدود ذات متحول واحد .

من أهم نتائج النظرية 1 لدينا :

نظرية 2 - إذا كان K حقلاً تبديلياً فإن $K[X]$ حلقة رئيسية .

نعلم من النظرية 1 ، ف 27 ، أنَّ $K[X]$ حلقة تبديلية تامة .
ليكن I مثاليا من $K[X]$ بحيث $I \neq 0$ ، نهدف إثبات كونه رئيسياً . لنختر ، من بين عناصر I الغير معدومة ، كثير حدود f ذي درجة أصغرية : ونحصل عندئذٍ على

$r \in I$ و $d^\circ(r) < d^\circ(f)$ يستلزمان $r = 0$. (11)

هذا ونعتبر عنصرا g من I ؛ وبما أن K حقل و $f \neq 0$ فإن النظرية 1 تعطي

$$g = fq + r \quad \text{حيث} \quad d^\circ(r) < d^\circ(f) \text{ ؛}$$

ونرى أن I يحتوي $g - fq = r$ إذ أنه يحتوي f و g ؛ وبالتالي حسب (11) ، يكون لدينا $r = 0$. وهكذا فإن كل عنصر من I يكون مضاعفا لـ f ، ومن الواضح أن كل مضاعفات f تنتمي إلى I ؛ ويكون بالتالي I مولداً عن f ، وبذلك ينتهي البرهان .

ينبغي على القارئ أن يقارن هذا البرهان مع الطرق المُشابهة التي استعملناها في ف 7، مثال 8.

ليكن $I = (f)$ مثالياً من الحلقة $K[X]$؛ إن كثير الحدود f وحيد مع إمكانية ضربه بعنصر من $K[X]$ قابل للقلب؛ وفي هذا الموضوع نُشير إلى النتيجة التالية:

توطئة 2 - إذا كانت K حلقة تبديلية تامة، فإن عناصر $K[X]$ القابلة للقلب هي عناصر K القابلة للقلب.

من الواضح أن كل عنصر قابل للقلب في K هو أيضاً قابل للقلب في $K[X]$. ليكن، من ناحية عكسية،

$$f(X) = a_n X^n + \dots + a_0 \text{ ،} \quad a_n \neq 0$$

عنصراً من $K[X]$ قابل للقلب، وليكن مقلوبه

$$g(X) = b_m X^m + \dots + b_0 \text{ ،} \quad b_m \neq 0$$

ويكون لدينا، إذا حسبنا جداء f مع g،

$$1 = a_n b_m X^{m+n} + \dots,$$

حيث لم نكتب الحدود التي لا تتعدى درجاتها $m + n$؛ وبما أن K حلقة تامة فيكون لدينا $a_n b_m \neq 0$؛ وبالتالي $m + n = 0$، ويقتصر f على العنصر a_n من K وهو قابل للقلب في K، نظراً للعلاقة $a_n b_m = 1$؛ وبهذا ينتهي البرهان.

بإمكاننا أيضاً (ف 27، نظرية 1) كتابة

$$d^\circ(f) + d^\circ(g) = d^\circ(f \cdot g) = 0$$

ونستنتج منها أن f و g يقتصران على عنصرين من K.

وتُشير التوطئة 2، إلى أنه إذا كان f يولد مثالياً I من $K[X]$ (حيث نفترض K حقلاً)، فإن كل مولد آخر لـ I يحصل عليه بضرب f بعنصر

ثابت غير معدوم (أي بعنصر من K غير معدم) . وبصورة خاصة ، إذا ضربنا f بمقلوب معامله الأساسي ، يُمكن أخذ f بحيث يكون 1 هو معامله الأساسي ، ويكون بذلك المولد الوحيد لـ I المتمتع بالخاصية المذكورة . وهكذا فإنه ، كما هو الحال بالنسبة للحلقة $\mathbf{Z}$ ، يُمكن دائماً اختيار مولداً لكل مثالي ، بطريقة «قانونية» .

ان أهمية النظرية 2 تكمن خصوصاً في دراسة بعض المسائل الإبتدائية نسبياً ؛ ولكن في دراسة «الهندسة الجبرية» ، نحتاج إلى نتائج أعمق من النظرية 2 ؛ وإن النص الأساسي في هذا المجال هو : إذا كانت K حلقة تبديلية نوثرية (أي كل مثالياتها من صنف منته) ؛ فإن $K[X]$ هي أيضاً حلقة نوثرية . ويوجد ، بالتمرين 27 من هذا الفصل ، برهان بسيط لهذه النتيجة . وبالتدريج بالنسبة لـ n ، يُمكن برهان أنه إذا كانت K حلقة نوثرية فإن $K[X_1, ..., X_n]$ نوثرية أيضاً : وبصفة خاصة ، إذا كان K حقلاً ، فإن $K[X_1, ..., X_n]$ نوثرية مهما كان n .

3. ق . م . أ و م . م . أ لكثيرات حدود ؛ كثيرات الحدود غير القابلة للإختصار

إذا كان K حقلاً ، فإن النظرية 2 تُمكن من تطبيق نتائج الفصل السابق على الحلقة $K[X]$.

وبصفة خاصة ، إذا كانت f_1 ، ... ، f_n كثيرات حدود غير معدومة من $K[X]$ ، فإنها تقبل **قاسماً مشتركاً أكبر** d ؛ ويكون لدينا :

نظرية 3 – لتكن d, f_1 ، ... ، f_n عناصراً من $K[X]$ ، حيث K حقل تبديلي . إن الخواص التالية متكافئة :

أ) d قاسم مشترك أكبر (ق م أ) لِـ f_1 ، ... ، f_n ؛

ب) القواسم المشتركة للجماعة f_1 ، ... ، f_n هي قواسم d ؛

ج) الشرط اللازم والكافي لكي يكون كثير حدود مضاعفاً لـ d هو أنه يُكتب على الشكل

$$u_1(X)\, f_1(X) + \ldots + u_n(X)\, f_n(X)$$

حيث $u_i \in K[X]$ ؛

د) يُمكن كتابة $d(X)$ على الشكل

$$u_1(X)\, f_1(X) + \ldots + u_n(X)\, f_n(X)$$

ويكون d بأصغر درجة ضمن كثيرات الحدود غير المعدومة التي تكتب على الشكل المذكور.

إن التكافؤ بين أ) و ب) بديهي؛ وتعني ج) أنّ d يولد المثالي المولد عن f_1، ...، f_n، وهذا هو بالتحديد تعريف ق م أ المعطى في الفصل السابق؛ واعتماداً على برهان النظرية 2، يُمكن الحصول على د) إذا لاحظنا أنَّ مولدات مثالي ما، هي كثيرات الحدود ذات درجة أصغرية ضمن عناصر هذا المثالي غير المعدومة. وبهذا ينتهي برهان النظرية 3.

نتيجة - إذا كانت f_1، ...، f_n كثيرات حدود غير معدومة وتنتمي إلى $K[X]$ حيث K حقل؛ فإن الخواص التالية متكافئة:

أ) القواسم المشتركة الوحيدة لـ f_1، ...، f_n هي عناصر K غير المعدومة؛

ب) توجد كثيرات حدود $u_i \in K[X]$ بحيث

$$u_1(X)f_1(X) + \ldots + u_n(X)f_n(X) = 1\cdot$$

من الواضح أن هذه النتيجة هي حالة خاصة من النظرية 1 ف 31. وإذا تحققت فنقول عن كثيرات الحدود f_1، ...، f_n أنها **أولية في ما بينها أو مع بعضها.**

ويُمكن أيضاً تعريف ما يُسمى **مضاعف مشترك أصغر** للجماعة $f_1, \ldots, f_n$؛ وهو مضاعف مشترك m لـ f_1، ...، f_n بحيث كل مضاعف للجماعة f_i هو

مضاعف لـ m ؛ أو، هو مضاعف مشترك لِـ f_1 ، ... ، f_n ذو درجة أصغرية.

وتُطبق النظريات 2 و 3 و 4 من ف 31، حرفياً على الحلقة $K[X]$ وليس من الضروري إعادة نصوصها.

وتُسمّى العناصر القصوى في $K[X]$ **كثيرات الحدود غير القابلة للإختصار في** $K[X]$ حيث K حقل. كل كثير حدود $f \in K[X]$ ، يُكتب بطريقة وحيدة أساسياً، على شكل جداء كثيرات حدود غير قابلة للإختصار: وهذا ناتج عن النظريتين 5 و 7 من الفصل السابق

ملاحظة 1 - إذا ضربنا كثير حدود غير قابل للإختصار بمقلوب معامله الأساسي (ونحصل عندئذٍ على كثير حدود مرافق حسب ف 31. رقم 6) فإننا نرى أنه يُمكن تجزئة كثير حدود f إلى عوامل غير قابلة للإختصار وعواملها الأساسية تساوي 1؛ وهكذا، فيُمكن تطبيق (9) من ف 31 على $K[X]$ حيث تكون P مجموعة كثيرات الحدود غير القابلة للإختصار والتي يكون مُعاملها الأساسي هو 1.

ملاحظة 2 - ليكن K حقلاً تبديلياً و p_1 و p_2 عنصرين من $K[X]$. ولحساب قاسمهما المشترك الأكبر، نستعمل طريقة القسْمات المتتالية: إذا افترضنا $d°(p_1) > d°(p_2)$ ، نكتب

$$p_1 = p_2 v_2 + p_3 \text{ ، حيث } d°(p_3) < d°(p_2)$$

$$p_2 = p_3 v_3 + p_4 \text{ ، حيث } d°(p_4) < d°(p_3)$$

وبمواصلة هذه العملية، ونظراً لأن درجات كثيرات الحدود p_i تتناقص، فإننا نصل إلى علاقة من الشكل

$$p_{n-1} = p_n v_n$$

ومن الواضح أن القاسم المشترك الأكبر لِـ p_1 و p_2 هو أيضاً القاسم المشترك الأكبر لِـ p_2 و p_3 ، وأيضاً لِـ p_3 و p_4 ، إلى آخره...، إذن هو أيضاً ق م أ لـ p_{n-1} و p_3 أي هو بالتحديد p_n : آخر باقي غير معدوم في عمليات القسمة المتوالية التي قمنا بها آنفاً.

وتُمكننا هذه الطريقة من الحصول على نظرية بيزوت : أي إيجاد كثيري حدود u_1 و u_2 ، بحيث $u_1 p_1 + u_2 p_2 = p_n$ ؛ إذ أنَّ

$$\begin{aligned} p_n &= p_{n-2} - p_{n-1} v_{n-1} \\ &= (p_{n-4} - p_{n-3} v_{n-3}) - (p_{n-3} - p_{n-2} v_{n-2}) v_{n-1} \\ &= p_{n-4} - p_{n-3}(v_{n-3} + v_{n-1}) + p_{n-2} v_{n-2} v_{n-1} \\ &= p_{n-6} - p_{n-5} v_{n-5} - (p_{n-5} - p_{n-4} v_{n-4})(v_{n-3} + v_{n-1}) + \\ &\qquad + (p_{n-4} - p_{n-3} v_{n-3}) v_{n-2} v_{n-1} \end{aligned}$$

وبمواصلة العملية ، نحصل على المطلوب . أنظر تمرين 3 .

4. تطبيق على الـكسور الناطقة

ليكن K حقلاً تبديلياً و $f(X) = \frac{p(X)}{q(X)}$ كسراً ناطقاً لمتحول واحد وبأمثال في K . نضع

$$q(X) = q_1(X)^{r_1} \dots q_n(X)^{r_n}$$

حيث الجماعة q_i ، $1 \leq i \leq n$ ، هي كثيرات حدود غير قابلة للإختصار وكل اثنين منها غير متناسبتين . عندئذٍ ، تشير النظرية 8 ، ف 31 ، إلى وجود كثيرات حدود $p_i(X)$ ، $1 \leq i \leq n$ ، بحيث

$$f(X) = \frac{p_1(X)}{q_1(X)^{n_1}} + \dots + \frac{p_n(X)}{q_n(X)^{r_n}} \tag{11}$$

ولدينا من ناحية أخرى

توطئة 3 - ليكن p و q كثيري حدود لمتحول واحد وبأمثال في حلقة تبديلية K . نفترض أن q واحدي ؛ توجد عندئذٍ كثيرات حدود h_i ، $(i \geq 0)$ ، كلها تقريباً منعدمة ، بحيث

$p = h_0 + h_1 q + h_2 q^2 + \dots$ ؛ $d^\circ(h_i) < d^\circ(q)$ مهما كان i .

ولبرهان ذلك ، نكتب ، اعتمادا على النظرية 1 ،

$$p = h_0 + p_1 q \quad \text{حيث} \quad d^\circ(h_0) < d^\circ(q)$$

ثم ،

$$p_1 = h_1 + p_2 q \quad \text{حيث} \quad d^\circ(h_1) < d^\circ(q)$$

إلى آخره ؛ إن درجات p_i تتناقص تماماً ، بحيث نحصل على $p_i = 0$ من أجل i كبير بقدر كاف ؛ وإذا عوّضنا كل علاقة في العلاقة السابقة نحصل على التوطئة .

وتُشير التوطئة 3 ، إلى أنه من أجل كل صحيح $r > 0$. يكون لدينا

$$\frac{p}{q^r} = \frac{h_0}{q^r} + \frac{h_1}{q^{r-1}} + \ldots + \frac{h_r}{q} + p_0$$

حيث

h_0 ، ... ، h_r و p_0 هي كثيرات حدود ، بحيث

$d^\circ(h_i) < d^\circ(q)$ من أجل $0 \leq i \leq r$.

وهكذا ، إذا طبقنا ذلك على العلاقة (11) ، وجمعنا معاً الحدود p_0 التي نحصل عليها بالنسبة لكل كسر ، فإننا نجد علاقة من الشكل

$$f(X) = g(X) + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{0 \leq r \leq r_i} \frac{h_{ir}(X)}{q_i(X)^r} \tag{12}$$

حيث g و h_{ir} هي كثيرات حدود ، حيث

$$d^\circ(h_{ir}) < d^\circ(q_i) \tag{13}$$

مهما كان i و r .

ويسمى الدستور (12) ، **تجزئة الكسر الناطق f إلى أجزاء بسيطة على الحقل K** . وسنرى في ما بعد ، أنه إذا كان $K = \mathbf{C}$ ، فإن كل h_{ir} يكون ثابتاً ، وفي الحالة $K = \mathbf{R}$ ، يكون كثير حدود ذي درجة لا تتعدى 1 .

مثال 2 – نأخذ

$$f(X) = \frac{1}{X^2(X-1)^3} \text{ ؛}$$

ومن الواضح أن X و $X - 1$ غير قابلين للإختصار لان درجتهما تساوي 1 .
ولدينا بالإضافة إلى ذلك

$$(X-1)^3 = X^3 - 3X^2 + 3X - 1 = X^2(X-3) + 3X - 1$$

ولدينا أيضاً

$$X^2 = (3X-1)\frac{X}{3} + \frac{X}{3}$$

$$3X - 1 = \frac{X}{3}\cdot 9 - 1 \text{ ؛}$$

وبالتالي

$$1 = \frac{X}{3}\cdot 9 - (3X-1) = 9X^2 - (3X+1)(3X-1)$$

$$= 9X^2 - (3X+1)\big((X-1)^3 - X^2(X-3)\big)$$

بحيث يُمكن كتابة مُطابقة بيزوت على الشكل

$$1 = (3X^2 - 8X + 6)X^2 - (3X+1)(X-1)^3$$

ويكون لدينا عندئذٍ

$$f(X) = \frac{(3X^2 - 8X + 6)X^2 - (3X+1)(X-1)^3}{X^2(X-1)^3}$$

$$= \frac{3X^2 - 8X + 6}{(X-1)^3} - \frac{3X+1}{X^2}$$

لكن لدينا

$$3X^2 - 8X + 6 = (X-1)(3X-5) + 1 = (X-1)[3(X-1) - 2] + 1$$

$$= 3(X-1)^2 - 2(X-1) + 1$$

ومنها نحصل على

$$f(X) = \frac{3}{X-1} - \frac{2}{(X-1)^2} + \frac{1}{(X-1)^3} - \frac{1}{X^2} - \frac{3}{X}$$

وهي تجزئة f إلى أجزاء بسيطة .

ف 33. جذور معادلة جبرية

1. أكبر عدد جذور ممكن

لقد برهنا (ف 28، توطئة 2) أن كل كثير حدود بدرجة n، لمتحول واحد وبأمثال في حلقة K تبديلية وتامة، يقبل على الأكثر n جذراً في K. وبإمكاننا الآن تعميم ذلك بواسطة نتيجة النظرية التالية:

نظرية 1 – إذا كان f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حقل تبديلي K و $d°(f) = n$، وإذا كانت a_1، ...، a_p جذور f في K، r، ...، r_p رتب هذه الجذور؛ فيكون لدينا

$$f(X) = (X - a_1)^{r_1} \dots (X - a_p)^{r_p}\ g(X) \tag{1}$$

حيث g هو كثير حدود لا يقبل أي جذر في K.

حسب تعريف رتبة الجذر، فإن f يقبل القسمة على كثيرات الحدود التالية

$$(X - a_1)^{r_1}\text{، ...، }(X - a_p)^{r_p}\ . \tag{2}$$

ومن جهة أخرى فإن كل كثير حدود من الشكل $X - a$ يكون غير قابل للإختصار إذ أنه إذا كان لدينا

$$X - a = p(X)\ q(X)$$

فينتج عن ذلك $1 = d°(p) + d°(q)$، بحيث يكون أحدهما بدرجة 0 أي، عنصراً قابلاً للقلب في $K[X]$. وأخيراً، من الواضح أنه إذا كان $a \neq b$ فإن $X - a$ لا يكون مترافقاً مع $X - b$ (أي أنهما غير متناسبين).

وينتج عن ذلك أن كل كثيري حدود من (2)، أوليان مع بعضهما (ف 31، توطئة 6) وبالتالي أن جداؤهما يقسم f (ف 31 نظرية 4)؛ ومنه وجود العلاقة (1).

وتُشير العلاقة (1) إلى ما يلي: إذا كان a جذراً لِـ g في K، فإن a تكون أحد العناصر a_1، ...، a_p إذ أنها أيضاً جذر لِـ f؛ وإذا افترضنا a_1 جذراً لِـ g، فإن $(X - a_1)$ يقسم $g(X)$ وبالتالي يكون $f(X)$ قابلاً للقسمة على $(X - a_1)^{r_1+1}$، وهذا يناقض تعريف رتبة الجذر a_1. وبذلك لا يقبل g أيّ جذر في K، وهذا يتم البرهان.

نتيجة - تحت شروط النظرية 1، لدينا

$$r_1 + ... + r_p \leq n = d^\circ(f).$$

وهذا ينتج عن

$$d^\circ(f) = r_1 + ... + r_p + d^\circ(g). \quad (3)$$

وتعني هذه النتيجة أن عدد جذور f في K لا يتعدى n، حتى لو حسبنا أنّ الجذر المضاعف برتبة r يكافئ r جذراً بسيطاً.

لنفترض مثلاً أنّ درجة f هي 3؛ عندئذٍ يكون عدد جذور f في K على النحو التالي:

١) ليس لِـ f سوى جذور بسيطة، وعند ذلك يكون عددها ثلاثة على الأكثر؛ ٢) يَقبل جذور برتبة 2، وعند ذلك يقبل f جذراً برتبة 2 أو جذراً بِرُتبة 2 وجذراً بسيطاً؛ ٣) يقبل f جذراً برتبة 3؛ ويَكون هذا الأخير وحيداً. وفي الواقع، إذا كان f يقبل جذرين بسيطين مختلفين، أو جذراً برتبة 2، فإنه يقبل بالضرورة جذراً آخر في K؛ إذ أنّه إذا كان لدينا

$$f(X) = (X - a)(X - b)\, g(X)$$

فإن g يكون بالضرورة ذا درجة 1، وبالتالي متناسباً مع $X - c$ من أجل $c \in K$ مُناسب، و c جذر لِـ f.

وبتعبير آخر، يُمكن للحالات التالية أن تحدث بالنسبة لـكثير حدود درجته 3:

لا يوجد أي جذر

يوجد جذر بسيط

يوجد جذر بسيط وجذر برتبة 2

توجد ثلاثة جذور بسيطة

يوجد جذر برتبة 3.

ومن السهل إعطاء أمثلة لكل حالة من الحالات المذكورة؛ فبالنسبة للأولى نأخذ(*) $K = \mathbf{Q}$ و $f(X) = X^3 - 2$؛ وللحالات الأخرى نأخذ $K = \mathbf{R}$ وكثيرات الحدود

$$(X - 1)(X^2 + 1)\text{ ،}$$
$$(X - 1)^2 (X - 2)\text{ ،}$$
$$(X - 1)(X - 2)(X - 3)\text{ ،}$$
$$(X - 1)^3$$

نعود الآن إلى الحالة العامة حيث يكون الحقل K وكثير الحدود f كيفيين. وقد يحدث، في التجزئة المعطاة في النظرية 1، أن يكون g ثابتاً، أي درجتُه تساوي 0، ويكون لدينا، بعبارة أخرى

$$f(X) = c\,(X - a_1)^{r_1} \ldots (X - a_p)^{r_p}$$

حيث c هو بالضرورة معامل f الأساسي؛ أو، بتعبير مكافئ، أنّ f يكتب

(*) إذا أردنا اعطاء مثال للحالة الأولى فإنه لا يُمكن أخذ $K = \mathbf{R}$، إذ أننا نبرهن في التحليل على أن كل كثير حدود ذي درجة فردية وبأمثال حقيقية يقبل جذراً حقيقياً على الأقل (وهذا تذكير موجز للبرهان: نُثبت أولاً أنه إذا كانت للمتحولات قيم كبيرة جداً فإن كثير الحدود يكون «متناهياً في الـكبر» مكافئاً لمعامله الأساسي، وله بالتالي اشارة هذا الأخير؛ وينتج عن ذلك أنه لا يُمكن لـكثير حدود ذي درجة فردية أن يحتفظ بإشارة ثابتة؛ وحسب نظرية القيم المتوسطة بالنسبة للتوابع المستمرة فإن كثير الحدود ينعدم في نقطة ما).
إن النتائج المماثلة لهذه النتيجة تخُص علم التحليل على الرغم من كونها تتعلق بكثيرات الحدود، وهذا ما جعلنا نعدل عن اعطاء نصوصها في هذا الـكتاب.

على شكل جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى وبأمثال في K . ونقول في هذه الحالة أنّ كل جذور f هي في K ؛ والسبب الذي يجعلنا نستعمل هذا الإصطلاح هو أنه إذا كان L حقلاً فوقياً للحقل K ، فإن جذور f في L ، أي العناصر $x \in L$ التي تُحقق

$$c(x - a_1)^{r_1} \dots (x - a_p)^{r_p} = 0 \text{ ،}$$

هي a_1 ، ... ، a_p ، وهي بالتالي جذور f في K . وسنرى فيما بعد أنه إذا لم تكن كل جذور f موجودة في K ، فإنه يوجد حقل L فوقي لِـK (مثلاً حقل مغلق جبري يحتوي K - أنظر رقم 2) ، وجذور لِـf في L غير محتواة في K .

هذا وإن الشرط اللازم والكافي لتكون كل جذور f موجودة في K ، هو أن تحقق r_1 ، ... ، r_p ، وهي رتب جذور f في K ، أن تحقق العلاقة

$$r_1 + \dots + r_p = d^\circ(f)$$

وأخيراً نُشير إلى أنه إذا كانت كل جذور f موجودة في K فإن الشأن يكون كذلك بالنسبة لكل قاسم لِـf: بما أن f هو جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى وبالتالي غير قابلة للإختصار ، فإذا كان g قاسماً لِـf ، فإن g يكون جدَاء لبعض كثيرات الحدود التي تؤلف تجزئة f ، ومنه فإن g يكون أيضاً عبارة عن جداء كثيرات حدود من الدرجة الأولى. (ويُمكن أيضاً استخدام التوطئة 4 من ف 31 وتطبيقها على f و g .) .

2. الحقول المغلقة جبرياً

ليكن K حقلاً تبديلياً ، و f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في K ومن الدرجة $n \geq 1$. وحسب الفقرة السابقة فإن f يقبل على الأكثر n جذراً في K ؛ ولكن ، لحدّ الآن ، لم نعطِ أي نص يؤكد وجود جذور لِـf في K ($X^2 + 1$ مثلاً لا يقبل جذوراً في الحقل $\mathbf{R}$) .

نقول عن حقل تبديلي K أنه **مغلق جبرياً**، إذا كان كل كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في K وغير ثابت يقبل على الأقل جذراً في K. وفي ما يخص وجود هذه الحقول، لدينا نظريتين أساسيتين، وهما:

نظرية 2 – (دالمبار – غوس). إن حقل الأعداد العقدية مغلق جبرياً.

نظرية 3 – (ستاينتز). إذا كان K حقلاً تبديلياً، فإنه يوجد حقل L مُغلق جبرياً وفوقياً للحقل K (أي أن K حقل جزئي من L).

وتعني النظرية 2 أن **كل معادلة جبرية**

$$a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n = 0 \text{ ،}$$

حيث a_i أعداداً عقدية و $n \geq 1$، تقبل جذراً عقدياً على الأقل؛ ومما يزيد هذه النتيجة أهمية هو كون الأعداد العقدية قد عرّفت لإعطاء جذور للمعادلات من الدرجة الثانية فقط. أمّا النظرية 3، فإنها تعني، بالنسبة لكل حقل تبديلي K، وجود حقل L معلق جبرياً ويحتوي حقلاً جزئياً متشاكلاً مع K؛ إذا كان $K = \mathbf{R}$ فنأخذ $L = \mathbf{C}$، مثلاً، (وإنشاء الحقل L انطلاقاً من الحقل K يكون أكثر صعوبة من انشاء $\mathbf{C}$ انطلاقاً من $\mathbf{R}$ على أن الطريقة يُمكن أن تكون مشابهة).

لا يُمكن برهان النظرية 2 دون اللجوء، بصورة أو بأخرى، إلى اعتبارات متعلقة بالتحليل وليس بالجبر؛ وهناك برهان بسيط في التمرين 25 من هذا الفصل. أما برهان النظرية 3، فإنه يتعدى بكثير إطار دراستنا هذه؛ أنظر تمرين 20.

وقد نتساءل عمّا إذا كان وجود جذور بالنسبة لكل معادلة جبرية ذات مجهول واحد يؤدي إلى نتيجة مماثلة بالنسبة لجمل المعادلات الجبرية ذات مجاهيل متعددة؛ وتُجيب على هذا السؤال، نظرية هيلبارت، وهي من أهم نظرياته:

نظرية 4 (نظرية هيلبارت). إذا كان K حقلاً تبديلياً مُغلقاً جبرياً، وإذا كان I مثالياً من الحلقة $K[X_1, \dots, X_n]$؛ فإن الشرطين التاليين متكافئان:

أ) توجد على الأقل نقطة $x \in K^n$ بحيث

$$f(x) = 0 \quad \text{مهما كان} \quad f \in I \qquad (4)$$

ب) $I \neq K[X_1, ..., X_n]$.

من الواضح أن أ) يستلزم ب) ، إذ أنّ كثير الحدود 1 لا ينعدم في أية نقطة من K^n ؛ أما الإستلزام ب) ⇐ أ) ، فهو أكثر تعقيداً ولا يُمكن البرهان عليه هنا؛ أنظر التمرين 33 من هذا الفصل. ولأجل فهم نص النظرية 4 ، نعتبر كثيرات حدود

$$f_1, ..., f_p \in K[X_1, ..., X_n]$$

ونبحث عن حل لجملة المعادلات الجبرية

$$f_1(x) = ... = f_p(x) = 0 \qquad (5)$$ ؛

وليكن I المثالي في $K[X_1 ، ... ، X_n]$ والمولّد عن $f_1 ,... , f_p$ ، أي مجموعة كثيرات الحدود التي هي من الشكل

$$f = u_1 f_1 + ... + u_p f_p$$ ؛

ومن الواضح أن حلول (5) هي حلول (4)؛ ومنه ، فإن القول كون (5) يقبل حلاً على الأقل يعني أنَّ I لا يساوي حلقة كثيرات الحدود بتمامها ، أو ، بتعبير آخر ، أن

$1 \notin I$.

نتيجة النظرية 4 - إذا كان لدينا حقلاً تبديلياً K مغلقاً جبرياً وكثيرات حدود

$$f_1, ..., f_p \in K[X_1, ..., X_n]$$ ؛

فإن الشرطين التاليين متكافئان :

أ) ليس لجملة المعادلات الجبرية

$$f_1(x) = ... = f_p(x) = 0$$

أي حل x في K^n

ب) توجد كثيرات حدود

$$u_1, ..., u_p \in K[X_1, ..., X_n]$$

بحيث يكون لدينا

$$. \ u_1 f_1 + ... + u_p f_p = 1$$

ملاحظة 1 - ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً؛ نقول عن جزء من K^n أنه خطيات جبرية تآلفية إذا كان مؤلفاً من حلول جملة معادلات جبرية $f_1(x) = ... = f_p(x) = 0$. ودراسة الخطيات الجبرية التآلفية هي من أهداف الهندسة الجبرية. وإذا كانت الخطيات الجبرية معرّفة بمعادلة وحيدة $f(x) = 0$، حيث f هو كثير حدود غير معدوم، فنقول عنها أنها سطح زائد (أو سطح إذا كان $n = 3$ أو منحني إذا كان $n = 2$). وهكذا فإن نتيجة النظرية 4 هي بمثابة شرط لازم وكافي ليكون تقاطع سطوح جبرية زائدة خالياً.

ا

3. عدد جذور معادلة ذات أمثال في حقل مغلق جبرياً

يُمكن تحسين النظرية 1 بالنسبة لحقل مغلق جبرياً:

نظرية 5 - ليكن f كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حقل K مغلق جبرياً، ومن الدرجة $n \geq 1$. لتكن a_1، ...، a_p جذور f المختلفة في K، و r_1، ...، r_p رتبها. يكون لدينا عندئذٍ

$$f(X) = c(X - a_1)^{r_1} ... (X - a_p)^{r_p} \tag{6}$$

حيث c هو المعامل الأساسي لِـf. ولدينا بالإضافة إلى ذلك

$$. \ r_1 + ... + r_p = n \tag{7}$$

يكفي تطبيق النظرية 1؛ وبما أن g لا ينعدم في K، فيكون بالتالي ثابتاً حسب تعريف الحقل المغلق جبرياً، ونحصل بذلك على النص الأول من

النظرية. أما النص الثاني فيُمكن الحصول عليه بحساب درجة الطرف الأيمن من العلاقة (6).

هذا وإنه من الممكن إعطاء تعبير آخر للعلاقة (7): كل معادلة جبرية من الدرجة $n \geq 1$، في حقل مُغلق جبرياً، تقبل بالتحديد n جذراً على شرط أن نعتبر كل جذر ذي رتبة r مكافئاً لِـr جذور مختلفة.

مثال 1 - نعتبر، في حقل تبديلي K، المعادلة

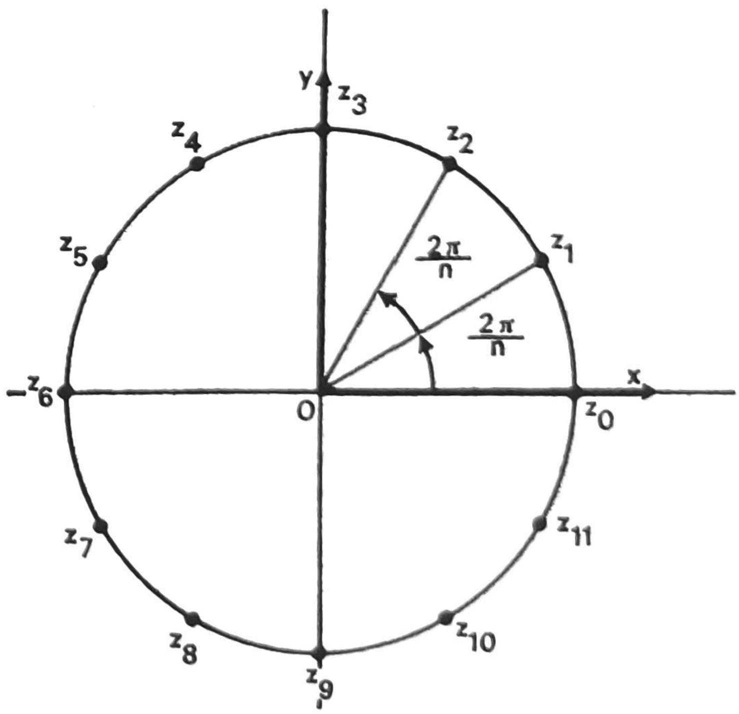
$$x^n = 1 \tag{8}$$

(وجذورها تُسمّى: الجذور النونية لوحدة K)؛ نضع

$f(X) = X^n - 1$، ومنه $f'(X) = n X^{n-1}$

ونرى عند ذلك أنه إذا لم يكن n من مضاعفات p، ميزة K، فإن الجذر الوحيد لِـf' هو 0 وهو ليس جذراً للعلاقة (8)؛ وبالتالي (ف 30، نظرية 6) فإن كل جذور f بسيطة في هذه الحالة، وإذا كان K، بالإضافة إلى ذلك، مغلقاً جبرياً فإن المعادلة المذكورة تقبل n جذراً مختلفاً، ويكون الحال كذلك في $\mathbf{C}$.

فإذا كان $K = \mathbf{C}$ فإن جذور (8) تكون معطاة بالدستور



$$z_k = \cos(2k\pi/n) + i \cdot \sin(2k\pi/n) \text{ ،} (0 \leq k \leq n-1)$$

وبتعبير آخر، فإنه يُمكن تمثيل هذه الجذور، في المستوى العقدي، برؤوس مضلع منتظم ومؤلف من n ضلع ومرسوم في الدائرة الواحدية (أنظر الصورة). إذ أن دستور موَافر، يعطي (ف 9، رقم 6) :

$$z_k^n = \cos(2k\pi\, n/n) + i \cdot \sin(2k\pi\, n/n) = 1$$

بحيث تكون الجماعة z_k ، $0 \leq k \leq n-1$ ، المعرّفة آنفاً، هي جذوراً للمعادلة (8)، كل اثنين منها مختلفين، وعددها n ، وهي بالتالي جذور (8).

نعتبر دائماً $K = \mathbf{C}$ ، ولتكن بصورة أعم المعادلة

$$z^n = a$$

حيث a عدداً عقدياً معطى غير معدوم (وجذور هذه المعادلة تُسمى الجذور النونية لِـ a). لنضع

$$z = \varphi(\cos\theta + i \cdot \sin\theta) \text{ و } a = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \text{ ،}$$

حيث r و φ عددان حقيقيان موجبان، و θ و φ عددان حقيقيان، عندئذٍ فإن المعادلة تُصبح

$$\varphi^n[\cos(n\theta) + i \cdot \sin(n\theta)] = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi) \text{ ؛}$$

وبذلك فهي تكافؤ الشرطين

$$n\theta \equiv \varphi(2\pi), \varphi^n = r \text{ ؛}$$

وبالتالي، فإن جذورها هي الأعداد العقدية

$$z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right]$$

وبما أن $z_k = z_{k+n}$ ، فإنه يكفي إعطاء n قيمة متوالية للعدد k ، للحصول على كل الجذور.

ملاحظة 2 – إذا لم يكن الحقل K مغلقاً جبريًّا فإن النظرية 5 قد لا تكون محققة؛ ولـكن إذا اعتبرنا جذور f في حقل مغلق جبرياً يحتوي K (ووجود

هذا الحقل ينتج عن نظرية ستاينتز) فإنها تكون محققة. وإذا كان مثلاً f كثير حدود من الدرجة n وبأمثال حقيقية، فإنه لا يقبل بصفة عامّة n جذراً حقيقياً، لـكنه يقبل n جذراً حقيقياً أو عقدياً (حيث نحسب الجذور باعتبار رتبها). وهكذا فإن $X^2 + 1$ يقبل جذرين عقديين، هما i و $-i$. كما أن المعادلة

$$x^n = 1 ،$$

تقبل n جذراً في $\mathbf{C}$، مع أنها لا تقبل سوى جذراً واحداً في $\mathbf{R}$ (إذا كان n فردياً) وجذرين في $\mathbf{R}$ (إذا كان n زوجياً).

4 كثيرات الحدود غير القابلة للإختصار وذات أمثال في حقل مغلق جبريًا

ليكن $f(X)$ كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في حقل K مغلق جبرياً؛ عندئذٍ يكون f غير قابل للإختصار إذا وإذا فقط كان لدينا

$$f(X) = aX + b ، a \neq 0 .$$

من الواضح أن الشرط كاف (حتى لو لم يكن K مغلقاً جبريًا) إذ أنَّ القواسم الوحيدة لِـf هي من الدرجة 0 (أي الثوابت) أو 1 (أي المتناسبة مع f). لنفترض عكسياً أنّ f غير قابل للإختصار؛ بما أن f غير قابل للقلب في الحلقة $K[X]$ فإنه يكون من الدرجة $n \geq 1$ (ف 32، توطئة 2)؛ وبما أن K مغلق جبرياً، فإن f يقبل على الأقل جذراً في K، ليكن a هذا الجذر؛ وعندئذٍ يكون f من مضاعفات $X - a$، وبالتالي متناسباً مع $X - a$ إذ أنه غير قابل للإختصار، وهذا يبرهن النص المذكور.

إذا قمنا بتجزئة كثير حدود $f \in K[X]$ إلى عوامل غير قابلة للإختصار، وذلك بواسطة الدستور (9) من ف 31، فإننا نأخذ P، المجموعة المؤلفة من كثيرات الحدود التي تكتب على الشكل

$$X - a ، a \in K ؛$$

ويقتصر عند ذلك الدستور (9) من الفصل 31 على الدستور (6) من النظرية 5 .

وبما أن الدستور الأخير يُشكل تجزئة f إلى عوامل غير قابلة للإختصار في الحلقة الرئيسية $K[X]$ ، فبإمكاننا استعماله مثلاً لحساب القاسم المشترك الأكبر لكثيري حدود f و g ؛ ولتكن a_1 ، ... ، a_m ، b_1 ، ... ، b_n جذور f و a_1 ، ... ، a_m ، c_1 ، ... ، c_p جذور g ، حيث رمزنا بـ $a_1, ..., a_m$ جذورهما المشتركة (في حالة وجودها) ، ونفترض أن كل الجذور المذكورة مختلفة ؛ نضع

$$f(X) = u(X - a_1)^{r'1} \dots (X - a_m)^{r'm} (X - b_1)^{s'1} \dots (X - b_n)^{s'n}$$

$$g(X) = v(X - a_1)^{r''1} \dots (X - a_m)^{r''m} (X - c'_1)^{s''1} \dots (X - c_p)^{s''p}$$

حيث u و v ثابتين ، من الواضح حسب ف 31 ، رقم 7 ، أن

$$d(X) = (X - a_1)^{r1} \dots (X - a_m)^{r}$$

حيث $r_i = \text{Min}(r'_i, r''_i)$ ، هو قاسم مشترك أكبر لـ f و g . وبتعبير آخر ، فإن جذور القاسم المشترك الأكبر هي الجذور المشتركة لـ f و g ، وإذا كان لجذر مشترك الرتبة r' بالنسبة لـ f والرتبة r'' بالنسبة لـ g ، فإن $\text{Min}(r', r'')$ هي رتبة الجذر المذكور بالنسبة للقاسم المشترك الأكبر .

وبصورة خاصة ، فإن f يكون أولياً مع g إذا وإذا فقط لا يقبل f و g أي جذر مشترك ، وهذا ما تنص عليه في الواقع نتيجة النظرية 4 عندما يكون $n = 1$.

وتمكن أيضاً النظرية 5 من تحسين تجزئة كسر ناطق لأجزاء بسيطة (ف 32 ، رقم 4) ، بالنسبة لحقل مُغلق جبريًا ؛ إذ أنه في هذه الحالة ، تكون كثيرات الحدود q_i ، غير القابلة للإختصار ، معطاة بالدستور

$$q_i(X) = X - a_i \text{ ،}$$

كما أنّ كثيرات الحدود h_i المعطاة في الدستور (12) من ف 32 ، هي من الدرجة 0 ، وبالتالي فهي ثوابت . وهكذا ، بالنسبة لحقل مُغلق جبرياً ، يُمكن كتابة كل كسر ناطق على الصورة

$$f(X) = g(X) + \sum_{i=1}^{i=n} \sum_{0 \leq r \leq r_i} \frac{c_{ir}}{(X - a_i)^r} \tag{9}$$

حيث c_{ir} هي عناصراً من K ، و a_i الجذور المختلفة لمخرج f ، و r_i رتب الجذور تلك ، و g كثير حدود (وهو خارج قسمة مدخل f على مخرجه) .

5. كثيرات الحدود الغير قابلة للإختصار وذات أمثال حقيقية

إن نتائج الفقرة السابقة تطبق على الحقل **C** وليس على **R** إذ أنه ليس مُغلقاً جبرياً . ومع هذا فبإمكاننا ، في هذه الحالة ، الحصول على بعض النتائج الكاملة :

نظرية 6 - إن العناصر الغير قابلة للإختصار في الحلقة $\mathbf{R}[X]$ هي من جهة كثيرات الحدود

$a X + b$ حيث $a \neq 0$

ومن جهة أخرى ، كثيرات الحدود

$a X^2 + b X + c$ حيث $b^2 - 4ac < 0$.

من الواضح أنه مهما كان الحقل التبديلي K ، فإن كثيرات الحدود من الدرجة 1 هي عناصر غير قابلة للإختصار في $K[X]$. وكذلك الحال بالنسبة لكثيرات الحدود من الدرجة 2 التي لا تقبل أي جذر في K ، إذ أن كل قاسم غير تافه لكثير حدود من هذا الصنف ، يكون من الشكل $a X + b$ وبالتالي يكون كثير الحدود قابلاً للقسمة على $a X + b$ وبالتالي يكون $-\frac{b}{a}$ جذراً له .

بقي لنا إذن إثبات أنه في الحالة $K = \mathbf{R}$ لا يوجد أي كثير حدود غير قابل للإختصار من صنف مختلف عما أعلناه .

ليكن f كثير حدود غير قابل للإختصار في $\mathbf{R}[X]$ (وبالتالي من الدرجة 1 على الأقل) . إذا كان $a \in \mathbf{R}$ جذراً لِـ f فإن هذا الأخير يقبل القسمة على

$X - a$ ويكون بالتالي متناسباً مع $X - a$ ويَكون عندئذٍ من الدرجة 1، والبرهان العكسي واضح. لنفترض أن f لا يقبل أيّ جذر حقيقي؛ وبما أنّ $\mathbf{C}$ مُغلق جبرياً فإن f يقبل على الأقل جذراً عقدياً $w = u + iv$ (u و v في $\mathbf{R}$)؛ لنفترض أن

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \text{ ؛}$$

ونرى أن $\bar{w} = u - iv$ هو أيضاً جذر لِـ f، إذ أن

$$f(\bar{w}) = a_0 + a_1 \bar{w} + \dots + a_n \bar{w}^n = \overline{a_0} + \overline{a_1 w} + \dots + \overline{a_n w^n} = \overline{f(w)} \text{ ،}$$

نظراً لـكون الأمثال a_i حقيقية. وبالتالي فإن f يقبل القسمة في $\mathbf{C}[X]$ على $X - w$ و $X - \bar{w}$؛ وبما أن هذين الأخرين أوليان مع بعضهما (إذ أن $w \neq \bar{w}$)، فإن f يقبل القسمة في $\mathbf{C}[X]$ على

$$(X - w)(X - \bar{w}) = (X - u - iv)(X - u + iv) = (X - u)^2 + v^2$$

وهو كثير حدود من الدرجة الثانية وبأمثال حقيقية ودون جذور حقيقية. ويكفي لإستنتاج كون كثير الحدود غير القابل للإختصار f هو من الدرجة الثانية، يكفي أن نُثبت أنه يقبل القسمة على $(X - u)^2 + v^2$ ليس فقط في $\mathbf{C}[X]$ وإنما أيضاً في $\mathbf{R}[X]$.

لنعتبر بصفة عامة حقلا K وحقلا L فوقيا لِـ K وكثيري حدود f و g بأمثال في K. ليكن q و r كثيري حدود في $K[X]$ بحيث

$$f = gq + r \text{ ،} \quad d^\circ(r) < d^\circ(g) \text{ ؛}$$

ومن الواضح أن العلاقتين السابقتين صحيحتان إذا نظرنا إلى f و g و q و r باعتبارها في $L[X]$؛ وبالتالي فإن حاصل وباقي قسمة f على g في $K[X]$ هما أيضاً في $L[X]$.

وإذا كان g يقسم f في $L[X]$، فإننا نرى أن g يقسم f في $K[X]$ وبذلك ينتهي برهان النظرية.

وينتج عن النظرية 6 وعن ف 31، نظرية 5، أن كل كثير حدود f بأمثال حقيقية يُمكن كتابته على الصورة

$$f(X) = u(X - a_1)^{r_1} \dots (X - a_p)^{r_p} (X^2 + b_1 X + c_1)^{s_1} \dots (X^2 + b_q X + c_q)^{s_q}$$

حيث u هو المعامل الأساسي لِـ f. وحيث الجماعة a_i هي الجذور الحقيقية المختلفة في $\mathbf{R}$ لِـ f و r_i هي رتبها وحيث $X^2 + b_j X + c_j$ هي كثيرات حدود غير قابلة لجذور حقيقية، أي تحقق $b_j^2 - 4 c_j < 0$.

ويمكننا أيضاً الحصول على التجزئة السابقة كما يلي: بما أن مترافق كل جذر عقدي لِـ f هو أيضاً جذر لِـ f، وهذا ينتج عن العلاقة التي تعرضنا لها سابقاً

$$f(\overline{w}) = \overline{f(w)}\text{،}$$

فإن f يقبل عدداً زوجياً من الجذور غير الحقيقية، $2q$ مثلاً؛ وإذا وضعنا

$$w_j = u_j + i v_j \quad (1 \leq j \leq q)\text{، } 0 \leq v_j$$

فنرى أن الجذور الأخرى تكون

$$\overline{w}_j = u_j - i v_j\ .$$

ونحصل بالتالي في $\mathbf{C}[X]$ على الدستور

$$f(X) = u.(X - a_1)^{r_1} \dots (X - a_p)^{r_p} (X - w_1)^{s_1} \dots (X - w_q)^{s_q} \times$$
$$\times (X - \overline{w}_1)^{s'_1} \dots (X - \overline{w}_q)^{s'_q}$$

وحسب ف 30 نظرية 7 نرى أن $s'_j = s_j$، وبالتالي يكون

$$[(X - w_j)(X - \overline{w}_j)]^{s_j} = [(X - u_j)^2 + v_j^2]^{s_j}$$

جزء من التجزئة ونحصل بذلك على التجزئة في $\mathbf{R}[X]$.

وكما رأينا في الفقرة السابقة، فإن هذه النتائج تمكن من تحسين تجزئة كسر ناطق إلى أجزاء بسيطة (ف 32 رقم 4). إذ أن كثيرات الحدود q_i، تكون من الصنف

$$q_i(X) = X - a_i$$

أو من الصنف

$$q_j(X) = X^2 + b_j X + c_j \quad \text{حيث} \quad b_j^2 - 4 c_j < 0\ .$$

وبالتالي يُمكن كتابة الدستور (12) من ف 32، على الصورة

$$f(X) = g(X) + \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{0 \leq r \leq r_i} \frac{c_{ir}}{(X - a_i)^r} + \sum_{j=1}^{j=s} \sum_{0 \leq r \leq s_j} \frac{u_{jr} X + v_{jr}}{(X^2 + b_j X + c_j)^r} ؛$$

ويلعب هذا الدستور دوراً هاماً في حساب تكامل الكسور الناطقة

6. علاقات بين جذور وأمثال معادلة

ليكن f كثير حدود من الدرجة $n \geq 1$ وبأمثال في حقل تبديلي K ،

$$f(X) = u_n X^n + \ldots + u_0 \tag{10}$$

ونفترض أنه يقبل n جذراً (باعتبار رتب الجذور) ، ويكون ذلك دائماً محققاً إذا كان K مُغلقاً جبرياً مثلاً ، لتكن

$$a_1 ، \ldots ، a_n$$

هذه الجذور ، حيث نكتب r مرّة كل جذر برتبة r . نحصل من النظرية 1 على العلاقة

$$f(X) = u_n(X - a_1) \ldots (X - a_n). \tag{11}$$

نضع ،

$$(X - a_1)(X - a_2) \ldots (X - a_n) = X^n + v_{n-1} X^{n-1} + \ldots + v_0 \tag{12}$$

واعتماداً على الدستور

$$\prod_{i \in I} (x_i + y_i) = \sum_{F \subset I} x_F \, y_{I-F}$$

الذي حصلنا عليه في ف 8، رقم 5، فإننا نجد

$$v_{n-k} = (-1)^k \sum a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k} ،$$

حيث يؤخذ المجموع المعرف في الطرف الأيمن بالنسبة لكل جزء $\{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, 2, ..., n\}$؛ ومن ناحية أخرى، لدينا حسب (11) و (12)،

$$u_{n-k} = u_n \; v_{n-k} \text{ ،}$$

ونحصل منها على العلاقات

$$\sum a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_k} = (-1)^k \; u_{n-k} / u_n \qquad (13)$$

التي تُسمى : **العلاقات بين أمثال وجذور المعادلة** $f(x) = 0$؛ وتُسمى الأطراف اليسرى في العلاقات (13)، تُسمّى **التوابع الإبتدائية المتناظرة لجذور المعادلة** $f(x) = 0$. أنظر التمرين 13 من هذا الفصل.

مثال 2 - إذا كانت

$$a x^2 + b x + c = 0$$

معُادلة من الدرجة الثانية، و u و v (مختلفان أم لا) جذريها، لدينا

$$u + v = -b/a$$

$$u v = c/a$$

مثال 3 - إذا كانت u و v و w (مختلفة أو غير مختلفة) جذور المعادلة

$$a x^3 + b x^2 + c x + d = 0$$

فإنه يكون لدينا

$$u + v + w = -b/a$$

$$u v + u w + v w = c/a$$

$$u v w = -d/a \text{ .}$$

ونُلاحظ أنه إذا كان $k = 1$، فإن (13) يكتب على الشكل

$$a_1 + \dots + a_n = -u_{n-1}/u_n \qquad (14)$$

وإذا كان $k = n$ فهو يُكتب على الشكل

$$a_1 \cdot a_2 \dots a_n = (-1)^n \; u_0/u_n \text{ .} \qquad (15)$$

اختصار المصفوفات

إذا كان لدينا فراغاً شعاعياً E منتهي البعد وإذا كان u تماثلاً داخلياً في E فإننا كثيراً ما نحتاج إلى إيجاد أساس لِـ E بحيث تكون مصفوفة u في هذا الأساس أبسط ما يُمكن - وأكبر درجة في «التبسيط» الذي يُمكن الحصول عليه هو المصفوفات القطرية. إن أهم وسيلة لحل هذه المسألة هي نظرية الأشعة الذاتية المدروسة في ف 34، وهي كافية في كثير من الحالات. وبالنسبة للتماثلات العامة u فمن الضروري استعمال براهين أكثر تعقيداً، وهذا ما سنتعرض له في ف 35.

أما ف 36، فإن هدفه هو اعطاء اصناف من المصفوفات التي يُمكن أن نعرف مسبقاً هل هي قابلة للإختصار إلى شكل قطري. وتكمن هنا الوسيلة الأساسية في تعريف «جداء سلمي» على E شبيه بالجداء السلمي المألوف في الفراغ العادي، وهذا ما يُعطي معنى لمفهوم الأشعة «الناظمية المتعامدة».

ف 34. القيم الذاتية

1. تعريف القيم الذاتية والأشعة الذاتية

ليكن E فراغاً شعاعياً على حقل تبديلي K ، وليكن u تماثلاً داخلياً في E . إن الشعاع الذاتي لِـ u هو بالتعريف كل شعاع $x \in E$ غير معدوم بحيث يكون $u(x)$ مُتناسباً مع x ؛ ويكون واضحاً عندئذٍ أن الفراغ D الجزئي من E والمولد عن x (أي مجموعة مضاعفات x) يُحقق $u(D) \subset D$ ؛ ومن الناحية العكسية ، إذا كان D مستقيماً من E مارًّا من نقطة الإنطلاق ومُحققاً $u(D) \subset D$ فإن كل شعاع محمول على D وغير معدوم هو شعاع ذاتي لِـ u .

نقول عن سلّمي $\lambda \in K$ أنه **قيمة ذاتية** لِـ u إذا وجد شعاع غير معدوم $x \in E$ بحيث

$$u(x) = \lambda x \quad (1)$$ ؛

وعندئذٍ فإن x شعاع ذاتي لِـ u ؛ ونقول عن x أنه شعاع ذاتي متعلق بالقيمة الذاتية λ .

نُلاحظ أن العلاقة (1) تعني أن التماثل الداخلي لِـ E

$$u - \lambda 1$$

يعدم x (حيث 1 هو التماثل الواحدي لِـ E ؛ $x \mapsto 1(x)$) .
وهكذا فإن الشرط اللازم لكي تكون λ قيمة ذاتية لِـ u هو أنّ

$$\operatorname{Ker}(u - \lambda 1) \neq \{0\} .$$

لنفترض E منتهي البعد على K ؛ إذا طبّقنا على $u - \lambda I$ النتيجة 2 من النظرية 8 ، ف 23 ، فإننا نحصل على :

نظرية 1 - ليكن u تماثلاً داخلياً لفراغ شعاعي E منتهي البعد على حقل تبديلي K . لكي يكون السّلمي $\lambda \in K$ قيمة ذاتية لِـ u فإنه يلزم ويكفي أن يكون لدينا

$$\text{dét}\,(u - \lambda\, I) = 0 . \qquad (2)$$

ستمكّننا هذه النتيجة من أن نبرهن على أن القيم الذاتية لِـ u هي جذور لمعادلة جبرية أمثالها في K .

2. كثير الحدود الذاتي لمصفوفة

ليكن E فراغاً شعاعياً بعده n منتهية على الحقل K وليكن u تماثلاً داخلياً لِـ E ؛ نقوم بإختيار أساس لِـ E ، ليكن $(a_i)_{1 \le i \le n}$ ، ونعتبر

$$\cup = (\alpha_{ij})_{1 \le i, j \le n}$$

مصفوفة u بالنسبة للأساس المذكور (ف 12 ، رقم 2) . وبما أن مصفوفة التماثل الواحدي لِـ E هي المصفوفة الواحدية

$$1_n = (\delta_{ij})_{1 \le i, j \le n} \quad \text{حيث} \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{إذا كان } i \neq j \\ 1 & \text{إذا كان } i = j \end{cases} ،$$

فإننا نرى أن مصفوفة $u - \lambda\, I$ في الأساس المعتبر هي المصفوفة

$$\cup - \lambda \cdot 1_n = \begin{pmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{21} \ldots \alpha_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \ldots \alpha_{nn} - \lambda \end{pmatrix} \qquad (3)$$

التي نحصل عليها بطرح λ من كل حد α_{ii} من قطر المصفوفة $\cup$.

وحسب النظرية 1 فإننا نحصل على القيم الذاتية لِـ u بكتابة العلاقة

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - \lambda & \alpha_{21} \ldots \alpha_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \quad \alpha_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (4)$$

لنعتبر أن K حلقة جزئية من $K[X]$ ، حلقة كثيرات الحدود لمتحول واحد وبأمثال في K ، ولتكن المصفوفة $X1_n - \cup$ التي أمثالها في الحلقة التبديلية $K[X]$ ؛ إن معيّن هذه المصفوفة هو

$$p_{\cup}(X) = \text{dét}(\cup - X1_n) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - X & \alpha_{21} \dots \alpha_{n1} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \quad \alpha_{nn} - X \end{vmatrix} \qquad (5)$$

وهو عنصر من $K[X]$ ، أي كثير حدود لمتحول واحد وبأمثال في K ؛ ويُسمى : **كثير الحدود الذاتي (أو المُميز) للمصفوفة** $\cup$ ، وتشير العلاقة (4) إلى أن القيم الذاتية لِـ u هي جذور المعادلة

$$p_{\cup}(\lambda) = 0 \qquad (6)$$

في K .

نُلاحظ أن كثير الحدود $p_{\cup}$ لا يتغير إذا أبدلنا $\cup$ بِـ $\cup'$ حيث $\cup'$ هي مصفوفة u بالنسبة لأساس آخر لِـ E ؛ بالفعل ، يكون لدينا عندئذٍ (ف 15 ، نظرية 2)

$$\cup' = P \cup P^{-1}$$

من أجل مصفوفة $P \in GL(n, K)$ ؛ وهكذا ، بما أن $P1_n P^{-1} = 1_n$ ، يكون لدينا

$$\cup' - X1_n = P \cup P^{-1} - XP1_n P^{-1} = P(\cup - X1_n)P^{-1}$$

وبالتالي ، حسب نظرية جداء المعينات ،

$$p_{\cup'}(X) = \text{dét}(P) \cdot p_{\cup}(X) \cdot \text{dét}(P^{-1}) = p_{\cup}(X) \cdot$$

من الطبيعي عندئذٍ أن نُسمي $p_{\cup}(X)$ ، حيث $\cup$ هي مصفوفة u بالنسبة لأساس كيفي لِـ E ، **كثير الحدود الذاتي للتماثل** u ؛ ونرمز له بِـ

$$p_u(X) \text{ ،}$$

ويكون لدينا كما هو بديهي

$$p_u(\lambda) = \text{dét}(u - \lambda I) \text{ من أجل كل } \lambda \in K \qquad (7)$$

(إذا كان الحقل K غير منته، فإنّ هذه العلاقة كافية لتمييز p_u حسب النظرية 1 من ف 28) . وهكذا فإن النظرية 1 تأخذ النص التالي : إن القيم الذاتية لِـ u هي جذور كثير حدوده الذاتي .

ومن جهة أخرى فإن الاعتبارات السابقة تجعل طبيعياً وضع التعريف التالي : نُسمي **قيمة ذاتية لمصفوفة مربعة** $\cup = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ ذات أمثال في K كل عنصر من K (أو، بصورة أعم، من حقل فوقي لِـ K) يُحقق المعادلة (6) .

3. شكل كثير الحدود الذاتي

نواصل استعمال الرموز السابقة ونحاول الآن الحصول على بعض الإرشادات حول شكل كثير الحدود

$$p_{\cup}(X) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - X & \alpha_{21} \dots \alpha_{n1} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} - X \dots \alpha_{n2} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{1n} \quad \dots & \alpha_{nn} - X \end{vmatrix}$$

وإذا نشرنا هذه المعين فإننا نحصل على مجموع $n\,!$ حد؛ ويكون «الحد الرئيسي» هو الجداء

$$(\alpha_{11} - X)(\alpha_{22} - X) \dots (\alpha_{nn} - X) \tag{8}$$

المؤلف من الحدود القطرية للمعيّن المعتبر؛ أما الحدود الأخرى فكل منها هو عبارة عن جداء n حدّ من المعيّن المذكور بحيث $(n - 2)$ حدّ منها توجد بالقطر الرئيسي؛ وبالتالي فإن $p_{\cup}(X)$ هي مجموع (8) مع كثير حدود درجته في X لا تتعدى $(n - 2)$. وينتج عن ذلك أن الأطراف التي درجاتها $n - 2 <$ في $p_{\cup}(X)$ هي أطراف (8) التي درجاتها $n - 2 <$ ، وبالتالي تكون لدينا علاقة من الشكل

$$(-1)^n \, p_{\cup}(X) = X^n - (\alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn}) X^{n-1} + \dots$$

حيث لم نكتب الأطراف التي درجاتها لا تتعدى $(n - 2)$.

وهكذا، نحصل على

$$(-1)^n p_{\cup}(X) = X^n - \tau_1(\cup) X^{n-1} + \tau_2(\cup) X^{n-2} \dots + (-1)^n \tau_n(\cup) \quad (9)$$

هذا وإن الأمثال $\tau_i(\cup) \in K$ هي توابع معرّفة بكثيرات حدود في α_{ij} وبأمثال في **Z**؛ وقد سبق أن رأينا أن

$$\tau_1(\cup) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \dots + \alpha_{nn} \quad (10)$$

وهذا السلمي يُدعى: أثر(*) المصفوفة $\cup$ ونرمز له عادة

$$T_r(\cup).$$

ومن جهة أخرى، إذا وضعنا $X = 0$ في (9) واعتمدنا على أن $p_{\cup}(0) = \text{dét}(\cup)$، فإننا نحصل على

$$\tau_n(\cup) = \text{dét}(\cup). \quad (11)$$

مثال 1 - نأخذ $n = 2$ و

$$\cup = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ويكون لدينا عندئذٍ

$$p_{\cup}(X) = \begin{vmatrix} a-X & b \\ c & d-X \end{vmatrix} = (a-X)(d-X) - bc = X^2 - T_r(\cup)X + \text{dét}\,\cup.$$

إذا أخذنا $n = 3$ و

$$\cup = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$

فإننا نحصل على

$$p_{\cup}(X) = \begin{vmatrix} a-X & b & c \\ a' & b'-X & c' \\ a'' & b'' & c''-X \end{vmatrix} = -X^3 + T_r(\cup)X^2 - \tau_2(\cup)X + \text{dét}(\cup)$$

ونترك للقارئ العناية بحساب $\tau_2(\cup)$؛ أنظر تمرين 40.

(*) أنظر إلى ف 12، تمرين 8 وإلى ف 16، تمرين 5 وإلى ف 26، تمرين 4 و 5، وإلى ف 34، تمرين 18 و 27.

4. وجود القيم الذاتية

نعلم أن كل معادلة جبرية ذات أمثال في حقل مُغلق جبرياً K تقبل دائماً على الأقل جذراً في K (حسب تعريف الحقول المُغلقة جبرياً...)، ونحصل عندئذٍ على النتيجة التالية:

نظرية 2 - كل تماثل داخلي في فراغ شُعاعي غير معدوم ومنتهي البعد على حقل مُغلق جبرياً، يقبل على الأقل قيمة ذاتية واحدة.

ومن الواضح أيضاً أن كل مصفوفة مربعة أمثالها في حقل مُغلق جبرياً K تقبل على الأقل قيمة ذاتية واحدة في K.

وتُطبق هذه النتيجة في المجال العملي خصوصاً إذا كان $K = \mathbf{C}$.

ملاحظة 1 - يُمكن لمصفوفة أمثالها في حقل غير مُغلق جبرياً K أن لا تقبل أيّة قيمة ذاتية في K. لنأخذ مثلاً $K = \mathbf{R}$ ونعتبر المصفوفة

$$U = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

التي تُمثل، في الإحداثيات المُتعامدة، دوراناً زاويته θ حول نقطة الإنطلاق. إن قيمها الذاتية هي جذور المُعادلة

$$\begin{vmatrix} \cos\theta - \lambda & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta - \lambda \end{vmatrix} = (\cos\theta - \lambda)^2 + \sin^2\theta = 0$$

والشرط اللازم والكافي لكي تقبل هذه المُعادلة جذراً حقيقياً هو أن تكون θ من مُضاعفات π؛ وفي الحالات الأخرى فإن الجذور تكون هي الأعداد العقدية

$$\cos\theta \pm i\sin\theta$$

وهي غير حقيقية.

ليكن E فراغاً شُعاعياً منتهي البُعد على حقل تبديلي K، و u تماثلاً داخل E. إذا كانت كل جذور كثير الحدود p_U تنتمي إلى K فإننا نقول عن u أن كل قيمه الذاتية هي في K، وعندئذٍ يكون لدينا (ف 33، رقم 1)

$$(-1)^n p_U(X) = (X-\lambda_1)^{r_1} \dots (X-\lambda_q)^{r_q}$$

حيث λ_i هي جذور p_U في K و r_i مَرتباتها.

مثال 2 – نأخذ $K = \mathbf{R}$ ونعتبر مصفوفة U من الدرجة 2؛ يكون لدينا عندئذٍ

$$p_U(X) = X^2 - T_r(U)X + \text{dét}(U) ،$$

وبالتالي فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون القيم الذاتية لِـ U كلها حقيقية هو

$$T_r(U)^2 - 4\,\text{dét}(U) \geq 0 .$$

5. الاختصار إلى شكل مثلثي

نقول عن مصفوفة مربعة U أمثالها في حلقة أنها **مثلثية** إذا كانت من الشكل

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} & \alpha_{31} \dots \alpha_{n1} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{32} \dots \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \alpha_{nn} \end{pmatrix} ،$$

أي أنّ حدودها الموجودة تحت القطر معدومة. ومن جهةٍ أخرى نقول عن تماثل داخلي u لفراغ شُعاعي E منته البعد على حقل K أنه قابل **للتثليث** إذا وجد أساس لِـ E تكون فيه مصفوفة u مثلثية، أي أنه يوجد أساس $x_1, \dots, x_n$ لِـ E بحيث تكون العلاقات التالية محققة

$$\left\{ \begin{array}{l} u(x_1) = \alpha_{11} x_1 \\ u(x_2) = \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 \\ \dots\dots\dots \\ u(x_n) = \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \dots \alpha_{nn} x_n \end{array} \right. ؛ \qquad (12)$$

وإذا حدث ذلك فإن u يقبل على الأقل قيمة ذاتية، وهي α_{11}؛ وزيادة على ذلك، يكون لدينا

$$p_{\cup}(X) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - X & \alpha_{21} & \dots & \alpha_{n1} \\ 0 & \alpha_{22} - X & \dots & \alpha_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & \alpha_{nn} - X \end{vmatrix}$$

وبالتالي

$$p_{\cup}(X) = (\alpha_{11} - X)(\alpha_{22} - X)\dots(\alpha_{nn} - X) \tag{13}$$

حسب ف 24، مثال 2. وبما أن كل α_{ii} ينتمي إلى K فإننا نرى أن كل القيم الذاتية لِـ u تنتمي إلى K. إن هذا الشرط، اللازم حتى يكون u قابلاً للتثليث (ومحققاً دائماً إذا كان K مغلقاً جبرياً)، هو أيضاً كاف - أي أنه يكون لدينا النص التالي:

نظرية 3 - ليكن E فراغاً شعاعياً منته البعد على حقل تبديلي K، وليكن u تماثلاً داخل E. إن u قابل للتثليث إذا وإذا فقط كانت كل قيَمِه الذاتية تنتمي إلى K.

كل المسألة هي إثبات أن الشرط كافي، ونبدأ بالبرهان على ذلك مفترضين أن K مُغلق جبرياً.

نهدف أن نثبت إذن، أنه إذا كان K مغلقاً جبرياً فإن كل تماثل داخل E هو قابل للتثليث. ليكن u تماثلاً داخل E، وبما أن K مُغلق جبرياً فإن u يقبل قيمة ذاتية على الأقل، أي أنه يوجد $\alpha_{11} \in K$ و $x_1 \in E$ بحيث

$$u(x_1) = \alpha_{11} x_1 \,. \tag{14}$$

ليكن D الفراغ الجزئي من E والمولد عن x_1، بحيث يكون D مستقراً بالنسبة لِـ u. وليكن F إضافي D في E بحيث $E = D \oplus F$ (مجموع مباشر)؛ إن وجود F ناتج عن النتيجة من النظرية 2، ف 19. ليكن p تماثل E على F الذي نحصل عليه بإسقاط كل $x \in E$ بطريقة موازية لِـ D (ف 17، رقم 4)، ونُنشئ تماثلاً v داخل F على النحو التالي

$$p(u(x)) = v(x) \quad \text{مهما كان} \quad x \in F\,; \tag{15}$$

وبما أن بعد F هو $n - 1$، فإنه يُمكن البرهان بالتدريج؛ لنفترض النظرية

صحيحة من أجل F و v ، ولْنُنشئ $x_2, ..., x_n$ ، أساساً لِـ F بحيث تكون لدينا علاقات من الصنف

$$\left\{\begin{array}{l} v(x_2) = \alpha_{22}\, x_2 \\ v(x_3) = \alpha_{32}\, x_2 + \alpha_{33}\, x_3 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ v(x_n) = \alpha_{n2}\, x_2 + \alpha_{n3}\, x_3 + \dots \alpha_{nn}\, x_n \end{array}\right. ; \qquad (16)$$

ونظراً لِـ(15) ، ومن أجل كل $x \in F$ ، يكون الفرق بين الشعاعين $u(x)$ و $v(x)$ مُضاعفاً سلّمياً لِـ x_1 ، ويكون لدينا بصورة خاصة علاقات من الصنف

$$\left\{\begin{array}{l} u(x_2) = \alpha_{21}\, x_1 + v(x_2) \\ u(x_3) = \alpha_{31}\, x_1 + v(x_3) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ u(x_n) = \alpha_{n1}\, x_1 + v(x_n) \end{array}\right. ; \qquad (17)$$

هكذا ، وبما أن $x_2, ..., x_n$ تؤلف أساساً لِـ F ، فإن $x_1, x_2, ..., x_n$ تؤلف أساساً لِـ E ، ونرى من العلاقات (14) و (16) و (17) أن مصفوفة v في هذا الأساس مثلثية . وهكذا نكون قد برهنا على النظرية لما يكون الحقل K مُغلقاً جبرياً .

ننتقل الآن إلى الحالة التي يكون فيها الحقل التبديلي K كيفياً ؛ وبطبيعة الحال سنتبع الطريقة السابقة ونبرهن بالتدريج بالنسبة لبعد E ، نفترضه n . نبدأ باختيار قيمة ذاتية لِـ u ، لتكن $\alpha_{11} \in K$ ؛ وشعاعاً ذاتياً $x_1 \in E$ متعلقاً بها ؛ تكون لدينا عندئذٍ من جديد العلاقة (14) .

وكما سبق نرمز بِـ D للمستقيم المولد عن x_1 ، وليكن F فراغاً جزئياً من E بعده $(n - 1)$ وإضافياً لِـ D في E ، وليكن v تماثل F المعطى بالعلاقة (15) : عندئذٍ تعود المسألة إلى إثبات أن v قابل للتثليث . تعود المسألة هذه إلى إثبات أن كل قيمة ذاتية لِـ v تنتمي إلى K (لأننا نُبرهن بالتدريج ونفترض النظرية محققة بالنسبة لِـ$[\dim(F) = n - 1]$) .

ولهذه الغاية ، نقوم باختيار أساس لِـ F ، ليكن $y_2, ..., y_n$ ، ونعتبر

$$V = (\beta_{ij})_{2 \le i, j \le n}$$

مصفوفة v بالنسبة لهذا الأساس ؛ وبما أنه لدينا علاقات من الصنف

$$u(y_i) = \alpha_{i1} x_1 + v(y_i) \text{ ،} \quad (2 \leq i \leq n)$$

فإن مصفوفة u بالنسبة للأساس $x_1, y_2, ..., y_n$ (في E) تكون

$$\text{U} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{21} \dots \alpha_{n1} \\ 0 & \beta_{22} \dots \beta_{n2} \\ 0 & \beta_{23} \dots \beta_{n3} \\ \dots & \dots \\ 0 & \beta_{2n} \dots \beta_{nn} \end{pmatrix} .$$

وإذا طرحنا X من الحدود القطرية لِـ U ، وحسبنا ، بواسطة ف 24 ، مثال 2 ، معين المصفوفة التي نحصل عليها فإننا نجد

$$p_{\text{U}}(X) = (\alpha_{11} - X)\, p_V(X) .$$

وبالتالي فإن $p_v = p_V$ يقسم $p_u = p_{\text{U}}$ ، وبما أن جذور الأخير تنتمي إلى K فإن جذور p_v هي أيضاً في K (ف 33 ، نهاية رقم 1) ؛ وبعبارة أخرى فإن كل القيم الذاتية لِـ v تنتمي إلى K ، وبهذا ينتهي البرهان .

نتيجة 1 - إذا كان E فراغاً شعاعياً على حقل مُغلق جبرياً ، فإن كل تماثل داخل E يكون قابلاً للتثليث .

نتيجة 2 - لتكن U مصفوفة مربعة مرتبتها $n \geq 1$ وأمثالها في حقل K مُغلق جبرياً توجد مصفوفة $P \in GL(n, K)$ بحيث

$$P \text{ U } P^{-1}$$

تكون مصفوفة مثلثية .

يكفي أن نُطبق النتيجة 1 على التماثل الداخلي لِـ K^n المعرّف بِـ U ، وأن نعتبر النظرية 2 من ف 15 (نتيجة) .

نتيجة 1 - لتكن U مصفوفة مربعة من المرتبة $n \geq 1$ أمثالها في حقل تبديلي K . الخاصتان التاليتان متكافئتان :

أ) توجد مصفوفة $P \in GL(n, K)$ بحيث تكون $P \text{ U } P^{-1}$ مثلثية ؛

ب) كل القيم الذاتية لِـ U تنتمي إلى K .

عندما نعتبر التماثل u الداخلي لِـ K^n والمعرّف بِـ U ، فإن الخاصة أ تعني أن u قابل للتثليث ؛ وبما أن $p_u = p_{\mathsf{U}}$ ، فإن التكافؤ ناتج عن النظرية .

كل مصفوفة $\mathsf{U} \in M_n(K)$ تُحقق الخاصة أ) توصف بأنها مثلثية على K . وتوجد دوماً بطبيعة الحال مصفوفة قابلة للقلب P بحيث تكون $P \mathsf{U} P^{-1}$ مثلثية ، ولـكن أمثال K ليست حتماً في K بصفة عامة ، بل هي في حقل L مغلق جبرياً يحوي K (إذا كان $K = \mathbf{R}$ مثلاً فإنه ينبغي اعتبار P مصفوفة عقدية قابلة للقلب) . وحتى نرى ذلك فإنه يكفي تطبيق النتيجة 2 . وقولنا بإن U قابلة للتثليث على K يعني أنه يُمكن افتراض أن أمثال P في K .

سنرى في الفصل القادم أنه يُمكن تحسين النظرية 3 ، وذلك عندما نثبت أنه يوجد أساس لِـ E تكون فيه مصفوفة u شاملة أكثر اصفاراً من المصفوفة المثلثية ؛ ولـكن البرهان على ذلك سيكون أكثر تعقيداً من برهان النظرية 3 مع العلم أن هذا الأخير كاف لـكثير من التطبيقات .

6. الحالة التي يكون فيها كل القيم الذاتية بسيطة

إن النظرية 3 لا تعتمد على أي شرط متعلق بمضاعفات القيم الذاتية لِـ u . وكثيراً ما يحدث أن تكون كل جذور p_u بسيطة بالإضافة لـكونها تنتمي إلى K . ويكون لدينا في هذه الحالة شيئاً أدق بكثير من النظرية 3 .

وقبل أن نثبت ذلك نبدأ ببرهان النتيجة التالية :

نظرية 4 - ليكن u تماثلاً داخل فراغ شعاعي E على حقل تبديلي ، و $x_1, \ldots, x_n \in E$ أشعة ذاتية لِـ u متعلقة بقيم ذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ مختلفة مثنى مثنى . عندئذٍ تكون الأشعة $x_1, \ldots, x_n$ مستقلة خطيًا .

ليكن F الفراغ الجزئي من E والمولد عن $x_1, \ldots, x_n$. إن العلاقات :

$$u(x_i) = \lambda_i \, x_i \text{ ،} \quad 1 \leq i \leq n \tag{18}$$

تشير إلى أنه إذا كان :

$$x = \sum \xi_i \, x_i$$

شعاعاً من F ، فإن الشعاع :

$$u(x) = \sum \xi_i \, u(x_i) = \sum \lambda_i \, \xi_i \, x_i$$

هو أيضاً في F . وبالتالي فإن F مستقر بالنسبة لِـ u ، الأمر الذي يسمح لنا أن نعتبر التماثل v المقصور لِـ u على F . يكون لدينا $v(x_i) = \lambda_i \, x_i$ بحيث تكون العناصر λ_i قيماً ذاتية لِـ v ، وبما أنها مختلفة مثنى مثنى فإننا نرى أن v يقبل n قيمة ذاتية على الأقل. ولـكنّ هذه القيم هي جذور لمعادلة من الدرجة $\dim(F)$ ، ويكون لدينا بالتالي :

$$n \leq \dim(F) \text{ ؛}$$

وبما أن $x_1, \ldots, x_n$ تولد F فإننا نرى من النظرية 10 ، ف 19 ، أن هذه الأشعة تؤلف أساساً لِـ F وهي بالتالي مستقلة خطيًا (أنظر أيضاً التمارين 38 و 39 من هذا الفصل) .

ملاحظة 2 – إن الإفتراض بأن القيم λ_i مختلفة مثنى مثنى ضروري لصحة النظرية 4 . لنعتبر مثلاً أن u هو التطبيق المعدوم ، أو التطبيق المطابق ؛ عند ذلك ومهما ، كانت الأشعة الغير معدومة $x_1, \ldots, x_n$ ، تكون $x_1, \ldots, x_n$ أشعة ذاتية لِـ u ، ولـكنه يستحيل إثبات أن n شعاع غير معدوم من فراغ شعاعي كيفي هي دائماً مستقلة خطياً .

يمكننا الآن إعطاء نص النتيجة التي أعلناها في البداية :

نظرية 5 – ليكن E فراغاً شعاعياً على حقل تبديلي K ونفترض أن E منته البعد وأن $1 \leq \dim(E) = n$ ؛ ليكن u تماثلاً داخل E . نفترض أنّ p_u ، وهو كثير الحدود الذاتي لِـ u يقبل n جذراً بسيطاً في K ، وأن $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ هي جذوره . يوجد عندئذٍ أساس لِـ E تكون فيه مصفوفة u هي :

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda_n \end{pmatrix}$$

من أجل كل i نقوم بإختيار شعاع x_i من E ذاتي بالنسبة لِـ u ومتعلق بالقيمة الذاتية λ_i؛ وحسب النظرية السابقة فإن الأشعة n هذه هي مستقلة خطيًا وبما أن $\dim(E) = n$ فهي تؤلف أساساً لِـ E . يصبح واضحاً عندئذٍ أن مصفوفة u في هذا الأساس هي على الشكل المذكور في النص.

نتيجة - لتكن U مصفوفة مرتبتها n وأمثالها في حقل تبديلي K . نفترض أن كثير حدودها الذاتي p_U يقبل n جذراً بسيطاً $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ في K . توجد عندئذٍ مصفوفة $P \in GL(n, K)$ بحيث:

$$P \cdot U \cdot P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \dots 0 \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \cdot \cdot \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots \lambda_n \end{pmatrix}$$

يكفي، لإثبات ذلك، أن نطبق النظرية 5، على التماثل المعرّف بِـ U داخل K^n .

مثال 3 - نأخذ $n = 2$ و $K = \mathbf{C}$ ؛ إن المعادلة الذاتية لِـ u هي $X^2 - T_r(U)X + \text{dét}(U) = 0$ ، وهي تقبل جذرين بسيطين في K (ومختلفين) إذا وإذاً فقط كان $(T_r(U))^2 - 4\,\text{dét}(U) \neq 0$. إذا تحقق ذلك فإن U تكون مشابهة (ف 15، رقم 5) لمصفوفة قطرية.

قد يحدث ألا يتحقق الشرط $T_r(U)^2 - 4\,\text{dét}(U) \neq 0$ ، وكمثال لذلك نعتبر المصفوفة:

$$U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

وحتى تكون هذه المصفوفة مشابهة لمصفوفة قطرية فمن اللازم أن تقبل U شعاعين ذاتيين مستقلين خطيًا في K^n ؛ ولكن القيمة الذاتية الوحيدة لِـ U

هي 1 ؛ وبذلك فإن الأشعة الذاتية المرافقة لها هي الأشعة $x = (\xi_1, \xi_2)$ التي تحقق $\cup x = x$ ، أي

$$\xi_1 + \xi_2 = \xi_1$$
$$\xi_2 = \xi_2 \text{ ،}$$

وبذلك فإن الأشعة المعتبرة هي المضاعفات السلمية للشعاع الأول في الأساس القانوني ، وهكذا نرى أنه لا يمكن إيجاد شعاعين ذاتيين لِـ $\cup$ مستقلين خطيًا في K^2 .

مثال 4 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ و $n = 2$ عندئذٍ يمكن تطبيق النتيجة إذا وإذا فقط كان :

$$T_r(\cup)^2 - 4 \text{ dét } (\cup) > 0$$

وتوجد في هذه الحالة مصفوفة حقيقية P قابلة للقلب بحيث تكون $P \cup P^{-1}$ مصفوفة قطرية . أما إذا كان لدينا :

$$T_r(\cup)^2 - 4 \text{ tét } (\cup) < 0$$

فإنه توجد مصفوفة عقدية P قابلة للقلب بحيث تكون $P \cup P^{-1}$ مصفوفة قطرية ولا يمكن أخذ P حقيقية .

نفترض أخيراً أن :

$$T_r(\cup)^2 - 4 \text{ dét } (\cup) = 0 \text{ ،}$$

ولتكن $\lambda \in \mathbf{C}$ القيمة الذاتية الوحيدة لِـ $\cup$ ؛ وهي قيمة حقيقية ،

$$\lambda = \frac{T_r(\cup)}{2} \text{ ،}$$

حسب نظرية المعادلات من الدرجة الثانية . إذا وجدت مصفوفة قابلة للقلب P (حقيقية أو عقدية) بحيث :

$$P \cup P^{-1} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

فمن الواضح أن $p_{\cup}$ يكون أيضاً كثير الحدود الذاتي المتعلق بالطرف الأيمن، أي $(X - \lambda_2)$ $X - \lambda_1(X - \lambda_2)$ ؛ وبما أن $p_{\cup}$ يقبل فرضاً قيمة ذاتية مضاعفة λ فإنه يكون لدينا $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$، ومنه فإن

$$P \cdot \cup \cdot P^{-1} = \lambda 1_2$$

$$\cup = \lambda 1_2 .$$

إذا كان $T_r(\cup)^2 - 4\,\text{dét}\,(\cup) = 0$ فإنه لا يمكن «تأقطر» $\cup$ إلا إذا كانت هي نفسها قطرية.

7. تمييز التماثلات الذاتية القابلة للتأقطر

ليكن E فراغاً شعاعياً على حقل تبديلي K بحيث $\dim(E) = n$ منتهي، وليكن $u \in \mathscr{L}(E, E)$. نقول عن u أنه **قابل للتأقطر** إذا وجد أساس لـ E مؤلف من أشعة ذاتية بالنسبة لـ u، أي تكون فيه مصفوفة u قطرية. وتعطي النظرية 5 شرطاً كافياً حتى يتحقق ذلك: وهذا الشرط هو أن كل جذور كثير الحدود الذاتي لـ u هي جذور بسيطة وتنتهي إلى K (أي أن كثير الحدود المذكور يقبل في K n جذراً مختلفاً). وهذا الشرط ليس لازماً بطبيعة الحال (هناك مثال تافة: التطبيق المطابق؛ أن مصفوفته بالنسبة لأي أساس هي مصفوفة قطرية، مع أن كثير حدوده الذاتي، وهو

$$(1 - X)^n،$$

لا يقبل جذور بسيطة إذا كان $n > 1$).

نهدف إذن إعطاء نص لازم وكاف حتى يكون $u \in \mathscr{L}(E, E)$ قابلاً للتأقطر. ولأجل ذلك نحتاج إلى المفاهيم التالية: إذا كانت λ قيمة ذاتية لـ u فإن **رتبة** λ هي بالتعريف رتبتها باعتبارها جذر لكثير الحدود p_u. ومن جهة أخرى نعرّف **الفراغ الجزئي الذاتي** لـ E **والمتعلق بـ** λ بالمجموعة المؤلفة من أشعة u الذاتية والمتعلقة بـ λ (وهي طبعاً فراغ شعاعي جزئي من E)؛ ونرمز للفراغ الجزئي هذا بـ $E(\lambda)$ بحيث يكون لدينا:

$\cdot\ E(\lambda) = \mathrm{Ker}\,(u - \lambda \cdot I)$

نظرية 6 - ليكن E فراغاً شعاعياً على حقل K و $\dim(E)$ منتهي وليكن $u \in \mathcal{L}(E, E)$ ، يكون u قابلاً للتأقطر إذا وإذا فقط تحقق الشرطان:

أ) كل جذور كثير الحدود الذاتي p_u تنتمي إلى K ،

ب) من أجل كل قيمة ذاتية λ فإن بعد الفراغ الجزئي الذاتي $E(\lambda)$ تساوي رتبة λ بإعتبارها جذر لِـ p_u .

لنفترض الشرطين محققين؛ ولتكن λ_1 ، ... ، λ_1 هي جذور p_u ولتكن r_1 ، r_2 ، ... ، r_q رتبها. نظراً للنظرية 4 فإن الفراغات الجزئية $E(\lambda_1)$ ، ... ، $E(\lambda_q)$ مستقلة خطيًا حسب مفهوم ف 17 ، رقم 3 ، وبما أننا لدينا:

$$\dim E(\lambda_1) + \dots + \dim E(\lambda_q) = n = \dim E \text{ ،}$$

واعتماداً على العلاقات(*).

$$\dim E(\lambda_i) = r_i\,,\ r_1 + \dots + r_q = n \text{ ،}$$

فإننا نحصل (ف 19 ، النتيجة 3 النظرية 13) على أن

$$E = E(\lambda_1) \oplus \dots \oplus E(\lambda_q) \quad \text{(مجموع مباشر) ؛} \qquad (17)$$

وبالتالي يمكننا الحصول على أساس لِـ E بإتحاد أسس لِـ $E(\lambda_1)$ ، ... ، $E(\lambda_q)$ ؛ ويكون هذا الأساس مؤلفاً من أشعة ذاتية لِـ u ، ويكون u قابلاً للتأقطر.

لنفترض عكسياً أن u قابل للتأقطر؛ ولتكن λ_1 ، ... ، λ_q قيمه الذاتية المختلفة. لنضع:

$$s_i = \dim E(\lambda_i)$$

إن الفراغات الجزئية $E(\lambda_i)$ مستقلة خطيًا (نظرية 4) ؛ وبما أن E يقبل أساساً مؤلفاً من الأشعة الذاتية لِـ u ، أي من عناصر في هذه الفراغات

(*) تعبر العلاقة اليسرى على الشرط أ) بينما تعتبر اليمنى على ب).

الجزئية ، فإننا نرى أن هذه الفراغات تولّد E . وتكون لدينا بالتالي العلاقة (17) السابقة ، بحيث نحصل على أساس لِـ E بأخذ إتحاد أسس لِـ $E(\lambda_1)$ ، ... ، $E(\lambda_q)$ ؛ وتكون مصفوفة u في هذا الأساس :

$$U = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdots & & & 0 \\ & \lambda_1 \cdots & & \\ & & \lambda_q \cdots & \\ 0 & & & \lambda_q \end{pmatrix}$$

حيث s_i من العناصر القطرية مساوية لـ λ_i؛ ويكون كثير الحدود الذاتي لـ U (أو كثير الحدود الذاتي لـ u) :

$$p_u(x) = (\lambda_1 - x)^{s1} \ldots (\lambda_q - x)^{sq};$$

وهذا يثبت من جهة أن كل جذوره تنتمي الى K ، ومن جهة اخرى أن تضاعف λ_i يساوي $\dim E(\lambda_i) = s_i$ ، وبذلك ينتهي البرهان .

ملاحظة 3. إذا كان K مغلقا جبريا (مثلا $K = \mathbf{C}$) فإن الشرط أ) يكون دائما محققا .

ملاحظة 4. إن الشرط ب) يعني أن $E(\lambda)$ يملك أكبر بعد ممكن؛ وبعبارة اخرى ، من أجل كل تماثل داخلي u لدينا المتراجحة :

$$\dim E(\lambda) \leq \lambda \text{ تضاعف }$$

وهذا من أجل كل قيمة ذاتية لـ u في K .

لنبرهن على ذلك : تضع $E(\lambda) = F$ ؛ من الواضح أن $u(F) \subset E$ وأن التماثل الداخلي v ، مقصور u على F ، هو التحاكي بنسبة λ؛ ويكون بالتالي كثير الحدود الذاتي لـ v :

$$p_v(X) = (\lambda - X)^{\dim E(\lambda)};$$

وهكذا للحصول على النتيجة المطلوبة يكفي أن نثبت أن $p_v(x)$ يقسم $p_u(x)$. وبعبارة أخرى فإن المسألة تعود إلى إثبات النتيجة العامة التالية : ليكن F

فضاء جزئيا من E مستقرًا بـ u (أي بحيث $u(F) \subset F$) ، ليكن v مقصور u على F (أي $u(x) = v(x)$ من أجل كل $x \in F$) ؛ عندئذ p_v يقسم p_u .

لهذا الغرض نختار $x_1, \dots, x_r$ أساسا لـ F ونقوم بإتمامه للحصول على أساس لـ E (ف 19 ، نتيجة 2 ، نظرية 2) . إن مصفوفة u على هذا الاساس تكون على الشكل

$$U = \begin{pmatrix} V & T \\ 0 & W \end{pmatrix}$$

حيث V هي مصفوفة v على الاساس $x_1, \dots, x_r$ و T مصفوفة مؤلفة من r سطرا و $n - r$ عمودا ، أما W فهي مصفوفة مربعة رتبتها $(n - r)$. وبالتالي :

$$U - X 1_n = \begin{pmatrix} V - X1_r & T \\ 0 & W - X1_{n-r} \end{pmatrix}$$

واعتماداً على المثال 2 من ف 24 ، نحصل على :

$$\text{dét}\,(U - X\,1_n) = \text{dét}\,(V - X\,1_r)\,\text{dét}\,(W - X\,1_{n-r})$$

ويمكن كتابة ذلك على الشكل :

$$p_u(X) = p_v(X) \cdot p_w(X)$$

وبه ينتهي البرهان .

يمكن أن ندخل مفهوم المصفوفة **القابلة للتأقطر . نقول عن مصفوفة** $U \in M_n(K)$ أنها قابلة للتأقطر إذا وجدت مصفوفة $P \in GL(n, K)$ ، بحيث $P \cdot U \cdot P^{-1}$ تكون قطرية ؛ وهذا يعني أن التماثل الذاتي لِـ K^n والمعرّف بِـ U قابل للتأقطر (نظراً لِـ ف 15 رقم 5) .

وهذا ممكن دوماً إذا كان كثير الحدود الذاتي p_U يقبل كل جذوره في K وإذا كانت هذه الجذور بسيطة .

يمكن أن ندخل مفهوماً مماثلاً لكن أكثر دقة ، وهو مفهوم المصفوفة **شبه البسيطة :** وهي كل مصفوفة $U \in M_n(K)$ تتمتع بالخاصية التالية : يوجد

حقل L فوقي لِـ K بحيث تكون $\cup$ قابلة للتأقطر بإعتبارها عنصراً من $M_n(L)$ (ويمكن أن نثبت أنه يمكن أخذ L مساو لأي حقل فوقي لِـ K ومغلق جبريًا).

إذا نظرنا إلى $\cup$ وكأنها مصفوفة تماثل ذاتي u لِـ K^n، فإن ذلك يعني حدسياً أن u يقبل عدداً «كافٍ» من الأشعة الذاتية بمجرّد أن نسمح للأشعة الذاتية أن تكون مركباتها في حقل فوقي لِـ K.

مثال 3 - نأخذ $K = \mathbf{R}$ ولتكن المصفوفة

$$\cup = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

إن القيم الذاتية لِـ $\cup$ هي (حسب الملاحظة 1)

$$\cos\theta \pm i\sin\theta\ ؛$$

إذا كان θ لا يساوي إحدى مضاعفات π فإن القيم المذكورة مختلفة، بحيث تكون $\cup$ قابلة للتأقطر بإعتبارها مصفوفة ذات أمثال في $\mathbf{C}$؛ ولكنها غير ذلك إذا إعتبرناها مصفوفة حقيقية - وهكذا فإن $\cup$ شبه بسيطة باعتبارها مصفوفة حقيقية (ويكون ذلك محققاً حتى لو أن θ يساوي إحدى مضاعفات π).

ف 35. الشكل القانوني لمصفوفة

إن الهدف من هذا الفصل هو البرهان على نظرية جوردان التي سيرد نصها بعد قليل، وعي تعوض كتابة المصفوفات غير القابلة للتأقطر، على شكل قطري. على الرغم من الدور الهام الذي تلعبه هذه النظرية في بعض الفروع الرياضية (خاصة في نظرية المعادلات التفاضلية الخطية) إلاَّ إن معرفتها لا تعتبر ضرورية بالنسبة للقارئ المبتدئ. ولذلك يستطيع هذا الأخير إهمال هذا الفصل بالمرة أو دراسته على شكل تمرين.

. نظرية هاميلتون - كايلي

لتكن K حلقة تبديلية وَ f كثير حدود من متغير واحد معاملاته في K، أي:

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_r X_r$$

نعتبر حلقة فوقية L لِـ K بحيث يكون K في مركز L (أي بحيث يكون $au = ua$ من أجل a في K وَ u في L) وليكن u عنصراً من L نضع:

$$f(u) = a_0 + a_1 u + \dots + a_r u^r$$

إذا كانت L تبديلية فإننا نجد تعريف الفقرة 1، في ف 28 (في الحالة العامة، نستطيع الرجوع إلى حلقة تبديلية بتعويض L بالحلقة الجزئية $K[u]$ المؤلفة من التوفيقات الخطية لقوى u والتي تنتمي معاملاتها إلى K).

بصفة خاصة إذا أخذنا $L = M_n(K)$ وهي حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة n والتي تنتمي عناصرها إلى K ، نرى أنه بإمكاننا تعريف $f(\mathrm{U})$ مهما كان كثير الحدود f في $K[X]$ والمصفوفة المربعة U التي تنتمي عناصرها إلى K (أو ، حتى إلى حلقة فوقية تبديلية لِـ K) .

بعد هذا يأتي :

نظرية 1 - لتكن U مصفوفة مربعة ذات معاملات في حلقة تبديلية K ، وَ :

$$P_{\mathrm{U}}(X) = \text{dét}\,(\mathrm{U} - X \cdot 1)$$

كثير حدودها المميز . عندئذٍ يكون :

$$P_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}) = 0$$

لرؤية ذلك نضع ، عندما تكون U من الرتبة n ،

$$(-1)^n p_{\mathrm{U}}(X) = X^n - \tau_1(\mathrm{U})X^{p-1} + \dots + (-1)^n \tau_n(\mathrm{U})$$

كما هو الحال في الفقرة 3 من ف 34 . إن المعاملات $\tau_i(\mathrm{U})$ هي كثيرات الحدود ذات معاملات صحيحة ناطقة ، متغيراتها عناصر U ، إنها كثيرات حدود ذات معاملات مستقلة عن U وعن حلقة الأساس K : إن الدستور التالي مثلاً :

$$\tau_1(\mathrm{U}) = \alpha_{11} + \dots + \alpha_{nn}$$

الذي يسمح بحساب $\tau_1(\mathrm{U})$ بدلالة المعاملات α_{ij} لِـ U هو نفس الدستور بالنسبة لكل المصفوفات U من الدرجة n وكل الحلقات التبديلية . لما كان

$$(-1)^n p_{\mathrm{U}}(\mathrm{U}) = \mathrm{U}^n - \tau_1(\mathrm{U})\mathrm{U}^{n-1} + \dots + (-1)^n \tau_n(\mathrm{U}) \cdot 1_n$$

نرى أنه توجد كثيرات حدود f_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ ذات معاملات صحيحة ناطقة لها n^2 متغيراً X_{ij} $(1 \leq i, j \leq n)$ ، بحيث ، من أجل كل حلقة تبديلية K وكل مصفوفة :

$$\mathrm{U} = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

درجتهما n ومعاملاتها في K ، نستطيع الحصول على المصفوفة $p_{\mathrm{U}}(\mathrm{U})$ بتعويض

المتغيرات في كثيرات الحدود f_{ij}. بمعاملات U. للبرهان على أن $p_{\text{U}}(\text{U}) = 0$ يكفي أن نثبت بأن كثيرات الحدود f_{ij} منعدمة، أي أن معاملاتها منعدمة ويكون الأمر كذلك عندما نبين (النظرية 1، ف 28) أن كل f_{ij} ينعدم كلما عوضنا فيه المتغيرات بعناصر صحيحة ناطقة وكيفية. لكن إنشاء كثيرات الحدود. f_{ij} نفسه يبين أن $p_{\text{U}}(\text{U}) = 0$ من أجل كل مصفوفة مربعة ذات معاملات في الحلقة $\mathbf{Z}$.

وهكذا يتبين أن إثبات النظرية 1 من أجل كل حلقة تبديلية K؛ يتم بمجرد إثباتها من أجل الحلقة $\mathbf{Z}$. لذلك نبرهن على هذه النظرية من أجل حلقة K مغلقة جبرياً؛ عندئذٍ تصبح النظرية صالحة من أجل الحلقة $\mathbf{C}$، وبالتالي، من أجل الحلقة الجزئية $\mathbf{Z}$ من $\mathbf{C}$، ومنه تصبح صالحة في جميع الحالات!

نعتبر إذن التماثل الداخلي u لِـ K^n الذي يقبل U كمصفوفة له بالنسبة للأساس القانوني. بالإعتماد على النظرية 1 من ف 34، نلاحظ أنه يوجد أساس $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ لِـ K^n بحيث

$$u(x_i) = \rho_{ii}\, x_i + \dots + \rho_{i1}\, x_1 \quad (1 \leq i \leq n) \qquad (1)$$

ولما كان معين مصفوفة مثلثية هو جداء حدودها القطرية فإن:

$$P_{\text{U}}(X) = p_u(X) = (\rho_{11} - X) \dots (\rho_{nn} - X)$$

وبالتالي يرجع الأمر، ما دامت $p_{\text{U}}(\text{U})$ هي مصفوفة التماثل الداخلي:

$$P_u(u) = (\rho_{11} - u) \dots (\rho_{nn} - u)$$

(بالنسبة للأساس القانوني لِـ K^n)، إلى البرهان على أن هذا التماثل منعدم. لنضع:

$$u_i = \rho_{ii} - u$$

من (1) نستنتج أن:

$$u_j(x_i) = (\rho_{ii} - \rho_{jj})x_i + y_{ij}$$

حيث y_{ij} ينتمي إلى الفضاء الشعاعي الجزئي F_{i-1} من K^n، المولد عن الأشعة $x_1, \dots, x_{i-1}$؛ من هذه الدساتير يأتي مباشرة.

$$u_i(F_i) \subset F_{i-1}$$

مهما كان i . ولكي نستخلص أن التماثل الداخلي :

$$v = p_u(u) = u_1 \circ \ldots \circ u_n$$

منعدم ، يكفي أن نلاحظ بأن :

$$v(K^n) = v(F_n) = u_1 \circ \ldots \circ u_{n-1} \circ u_n(F_n)$$

$$\subset u_1 \circ \ldots \circ u_{n-1}(F_{n-1})$$

$$\subset \ldots \subset u_1(F_1)$$

وينتهي البرهان على النظرية بالملاحظة أخيراً أن $u_1(F_1) = \{0\}$.

مثال 1 – إذا كانت $\cup$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 معاملاته في حلقة تبديلية كيفية ، نجد :

$$\cup^2 - T_r(\cup) \cdot \cup + \text{dét}(\cup) \cdot 1_2 = 0$$

نوصي القارئ بأن يتأكد من هذه النتيجة بالحساب المباشر .

ملاحظة 1 – لما كان $p_\cup(X) = \text{dét}(\cup - X \cdot 1_n)$ ، فلا بد أن القارئ المبتدئ الماهر قد فكّر في البرهان على النظرية 1 بكتابته :

$$p_\cup(\cup) = \text{dét}(\cup - \cup \cdot 1_n) = \text{dét}(\cup - \cup)$$
$$= \text{dét}(0) = 0$$

إن هذا البرهان الجذاب يعتمد ، لسوء الحظ ، على الخطأ المتمثل في الاعتقاد بأنه عندما نعوض في $\cup - X \cdot 1_n$ المتغير X بالمصفوفة $\cup$ ، نجد المصفوفة $\cup - \cup \cdot 1_n = 0$. وهذا غير صحيح ذلك أننا نحصل على $\cup - X \cdot 1_n$ بطرح X من الحدود القطرية لِـ $\cup$ ، وإذا ما عوضنا X بِـ $\cup$ في النتيجة التي نحصل عليها بهذه الطريقة ، نجد عندئذٍ المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} - U & \alpha_{21} \dots \alpha_{n1} \\ \dots & \dots \\ \alpha_{1n} & \alpha_{2n} \dots \alpha_{nn} - U \end{pmatrix}$$

التي تنتمي معاملاتها إلى الحلقة الجزئية من $M_n(K)$ المولدة عن K و U؛ والملاحظ أن هذه المصفوفة غير منعدمة!.

إن نظرية هاميلتون - كايلي تنص، فقط، على أن معين هذه المصفوفة منعدم.

توضح هذه الملاحظة أنه يحدث أحياناً بأن نرتكب أخطاء بسبب الرموز التي نستعملها.

2. التفكيك إلى تماثلات داخلية معدومة القوى

الخطوة الأولى في برهان نظرية جوردان تتمثل في إثبات النتيجة التالية:

نظرية 2 - ليكن u تماثلاً داخلياً لفضاء شعاعي E بعده منته، على حقل تبديلي K، نفرض أنه كثير الحدود p_u له جذوره كلها في K. نضع:

$$p_u(X) = (\lambda_1 - X)^{r_1} \dots (\lambda_q - X)^{r_q}$$

حيث $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ تنتمي إلى K، وتمثل مختلف جذور p_u، أما $r_1, \dots, r_q$ فهي رتب مضاعفات هذه الجذور، نضع أخيراً:

$$E_i = \text{Ker}\,[(u - \lambda_i)^{r_i}];\ 1 \leq i \leq q$$

عندئذٍ يصبح E يساوي المجموع المباشر للفضاءات الجزئية E_i، ولدينا:

$$\dim(E_i) = r_i;\ 1 \leq i \leq q$$

لاختصار هذه الرموز، نضع:

$$p(X) = p_u(X); f_i(X) = (\lambda_i - X)^{r_i}$$
$$g_i(X) = f_1(X) \dots f_{i-1}(X) f_{i+1}(X) \dots f_q(X)$$

لما كانت العناصر λ_i مختلفة مثنى مثنى ؛ فإن كثيرات الحدود g_i $(1 \leq i \leq q)$ أولية فيما بينها ، وبالتالي توجد كثيرات حدود h_i في $K(X)$ بحيث :

$$\sum_{1 \leq i \leq q} h_i(X)\, g_i(X) = 1$$

نضع :

$$u_i = f_i(u);\, v_i = g_i(u);\, w_i = h_i(u)$$

بحيث تصبح التماثلات الداخلية لِـ E التي نحصل عليها بهذه الطريقة ، والبالغ عددها $3q$ ، تبديلية مثنى مثنى فيما بينها (لأنها كثيرات حدود لِـ u كلها) ، لدينا إذن :

$$w_1 \circ v_1 + \ldots + w_q \circ v_q = j_E$$

حيث يرمز j_E للتماثل الداخلي المطابق ، لِـ E . ومنه نستنتج أن :

$$x = w_1\big(v_1(x)\big) + \ldots + w_q\big(v_q(x)\big)\ \forall x \in E \tag{2}$$

لكن النظرية 1 تبين أن :

$$0 = p(u) = f_i(u)\, g_i(u) = u_i \circ v_i$$

مهما كان i ، ولما كان u_i وَ w_i يتبادلان فيما بينهما فإن $u_i \circ w_i \circ v_i = 0$. وبالتالي :

$$w_i\big(v_i(x)\big) \in E_i$$

مهما كان i و x ، وعليه تبين (2) أن :

$$E = E_1 + \ldots + E_q$$

يبقى أن نبين بأن هذا المجموع مباشر وبأن $\dim(E_i) = r_i$ ؛ بما أن :

$$r_1 + \ldots + r_q = d^\circ(p_u) = \dim(E)$$

فإن النتيجة 3 للنظرية 13 من ف 19 تبين أنه يكفي إثبات العلاقات :

$$\dim(E_i) \leq r_i \tag{3}$$

لكن $E_i = \mathrm{Ker}(u_i)$ و u يتبادل مع u_i ، ولذا يتضح أن $u(E_i) \subset E_i$ ؛ لنرمز

بِـ u'_i للتماثل الداخلي لِـ E_i المستخرج من u ، نرى عندئذٍ (الملاحظة 4 ، ف 34) أن كثير الحدود p_u يقبل القسمة على كثير الحدود $p_{u'_i}$ ، لما كانت كل جذور كثير الحدود p_u تنتمي إلى K فإن الأمر كذلك فيما يخص $p_{u'_i}$ ، وبالتالي يوجد أساس لِـ E_i يجعل مصفوفة u'_i ، بالنسبة إليه ، مصفوفة مثلثية (النظرية 3 ، ف 34) ؛ لكن :

$$(u'_i - \lambda_i)^{r_i} = 0$$

وذلك حسب إنشاء الفضاءات E_i ، وبالتالي فإن المعاملات القطرية لمصفوفة u'_i ، بالنسبة للأساس المعتبر ، تساوي حتماً λ_i ، بحيث نجد أن :

$$p_{u'_i}(X) = (\lambda_i - X)^{\dim(E_i)}$$

لكي يُقْسَم p_u على كثير الحدود هذا ، من الواضح أنه يجب أن تكون العلاقة (3) محققة ، وبذلك ينتهي البرهان .

تمثل الأعداد السلمية $\lambda_1, ..., \lambda_q$ ، بطبيعة الحال ، مختلف القيم الذاتية لِـ u . تُبيّن النظرية 2 أن E مجموع مباشر للفضاءات الجزئية E_i بحيث :

$$u(E_i) \subset E_i$$

وَ

$$(u - \lambda_i)^{r_i} = 0 \quad \text{في} \quad E_i$$

وبما أننا نحصل على أساس لِـ E بإعتبار إتحاد أسس مختلف الفضاءات E_i ، نرى أنه لكي نكتب مصفوفة u ، بالنسبة لأساس لِـ E ، على أبسط شكل ممكن ، يكفي أن نعتبر E_i ونحل فيها نفس المسألة بأخذ التماثل الداخلي لِـ E_i المستخرج من u أو المستخرج من $u - \lambda_i$ الذي هو معدوم القوة ، أي أن إحدى قواه معدومة .

وهكذا يرجع الأمر الآن ، بعد إعتبار تماثل داخلي معدوم القوة لفضاء شعاعي ، إلى إختيار أساس لهذا الفضاء يجعل مصفوفة التماثل الداخلي المعتبر ، بالنسبة إليه ، أبسط مصفوفة ممكنة . ذلك هو موضوع الفقرة الموالية .

3. بنية التماثلات الداخلية المعدومة القوى

نتناول الآن الخطوة الثانية في برهان نظرية جوردان:

نظرية 3 – ليكن u تماثلاً داخلياً لفضاء شعاعي E بعده $n \geq 1$ منته، على حقل تبديلي K. نفرض أنه يوجد عدد صحيح $p \geq 0$ بحيث:

$$u^p = 0$$

(أي أن u معدوم القوة). عندئذٍ يوجد أساس لِـ E يجعل مصفوفة u، بالنسبة إليه، تكتب على النحو:

$$\begin{pmatrix} 0 & \nu_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \nu_n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث يرمز كل عدد سلمي ν_i إلى عدد يساوي 0 أو 1.

نستطيع بطبيعة الحال، فرض $u \neq 0$، لأن النظرية تافهة في حالة $u = 0$. يوجد عندئذٍ عدد صحيح $q \geq 1$ بحيث:

$$u^q \neq 0; u^{q+1} = 0$$

مهما كان العدد الصحيح $r \geq 0$، نضع من جهة أخرى:

$$E_r = \text{Ker}\,(u^r)$$

لدينا:

$$E_{q+1} = E \text{ وَ } E_0 = \{0\}$$

توطئة 1 – إن متتالية الفضاءات الجزئية:

$$0 = E_0 \subset E_1 \subset \dots \subset E_q \subset E_{q+1} = E$$

متزايدة تماماً، ولدينا $u(E_{i+1}) \subset E_i$ مهما كان $i \geq 0$.

إذا انعدم شعاع x بواسطة التماثل الداخلي u^{i+1} ، فإنه يتضح بأن $u(x)$ ينعدم بواسطة u^i ، وهذا يبين النتيجة الثانية في نص اللازمة 1 . يبقى أن نثبت بأن E_{i+1} محتواة تماماً في E_i من أجل $0 \le i \le q$. نلاحظ في البداية أن العلاقة :

$$E_{i+1} \supset E_i$$

تافهة من أجل i . نفرض الآن أن لدينا $E_{i+1} = E_i$ من أجل دليل i بحيث $0 \le i \le q$؛ من أجل كل x في E ، لدينا :

$$0 = u^{q+1}(x) = u^{i+1}\left(u^{q-i}(x)\right)$$

إذن $u^{q-i}(x) \in E_{i+1}$ ؛ من $E_{i+1} = E_i$ ينتج إذن أن $u^{q-i}(x) \in E_i$ مهما كان x في E ، وبالتالي : $u^q(x) = 0$ مهما كان x في E وهذا يتناقض مع تعريف q .

توطئة 2 – ليكن i عدداً صحيحاً بحيث $1 \le i \le q$ ، وَ F فضاء شعاعياً جزئياً من E بحيث $F \cap E_i = \{0\}$ ؛ لدينا عندئذٍ $u(F) \cap E_{i-1} = \{0\}$ ، كما يستخرج من u تشاكل من F على $u(F)$.

نعتبر شعاعاً x في $u(F) \cap E_{i-1}$ ؛ يوجد في هذه الحالة y في F بحيث $x = u(y)$ وبما أن $u^{i-1}(x) = u^i(y)$ ، نرى أن العلاقة $x \in u(F) \cap E_{i-1}$ تستوجب $y \in F \cap E_i$ ، إذن $y = 0$ ، وبالتالي $x = 0$. إن التطبيق من F في $u(F)$ المستخرج من u خطي وغامر ، وهو متباين لأنه إذا كان $u(y) = 0$ حيث y ينتمي إلى F ، الأمر الذي يستلزم $u(y) \in E_{i-1}$ ؛ فإن الاستدلال السابق يبين كذلك أن $y = 0$. وبهذا ينتهي إثبات التوطئة .

توطئة 3 – توجد فضاءات شعاعية جزئية $F_1, \ldots, F_{q+1}$ تتمتع بالخاصيتين التاليتين :

أ) E_i مجموع مباشر لِـ E_{i-1} وَ F_i مهما كان i بحيث $1 \le i \le q+1$.

ب) إقتصار u تطبيق متباين من F_i في F_{i-1} مهما كان i بحيث $2 \le i \le q+1$.

نأخذ في البداية F_{q+1} يساوي مكمل (أو إضافي) E_q في $E_{q+1} = E$ ؛ عندئذٍ يصبح الفضاء الجزئي $u(F_{q+1})$ محتوياً في E_q ولا يلتقي مع E_{q-1} إلا عند 0 حسب التوطئة 2، وبالتالي يوجد مكمل F_q لِـ E_{q-1} في E_q يحتوي $u(F_{q+1})$ ؛ من جهة أخرى فإن الفضاء الجزئي $u(F_q)$، يحتوي E_{q-1} ولا يلتقي بِـ E_{q-2} إلا عند 0 حسب التوطئة 2؛ نستطيع إذن إنشاء مكمل F_{q-1} لِـ E_{q-2} في E_{q-1}، يحتوي $u(F_q)$ ؛ ثم نواصل الإنشاء هكذا على التوالي فنشكل بطبيعة الحال فضاءات جزئية F_i تحقق الشرط أ) وتحقق $u(F_i) \subset F_{i-1}$ ؛ أما الخاصية ب) فتنتج بعد ذلك من التوطئة 2.

نستطيع الآن إنهاء برهان النظرية 3. من أجل ذلك ننشئ الفضاءات الجزئية F_i $(1 \leq i \leq q+1)$ الواردة في التوطئة 3. لنرمز بِـ :

$$x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1,r_1}$$

لأساس لِـ F_{q+1}. بما أن هذه الأشعة مستقلة خطياً، و u يطبق F_{q+1} في F_q بصفة تباينية (الخاصية ب) في 3)، فإن صورة هذه الأشعة بواسطة u، مستقلة خطياً، ولذا فهي جزء من أساس لِـ F_q (النظرية 2، ف 19). أي أنه يوجد أساس لِـ F_q من الشكل :

$$x_{21}, x_{22}, \ldots, x_{2,r_1}, x_{2,r_1+1}, \ldots, x_{2,r_2}$$

حيث :

$$u(x_{1j}) = x_{2j}; 1 \leq j \leq r_1$$

باتباع نفس الطريقة الإستدلالية إبتداء من الأشعة x_{2j}، نرى أنه يوجد أساس :

$$x_{31}, \ldots, x_{3,r_3}$$

لِـ F_{q-1} بحيث :

$$u(x_{2j}) = x_{3j}, 1 \leq j \leq r_2$$

وإذا ما تابعنا هكذا على التوالي نصل في الختام إلى أساس :

$$x_{q+1,1}, \ldots, x_{q+1,r_{q+1}}$$

لِـ $F_1 = E_1$ بحيث :

$$u(x_{q,j}) = x_{q+1,j} \quad 1 \leq j \leq r_q$$

وبما أن $E_1 = \text{Ker}(u)$ فإن لدينا أيضاً :

$$u(x_{q+1,j}) = 0; \; 1 \leq j \leq r_{q+1}$$

بعد هذا، وما دام E مجموعاً مباشراً للفضاءات الجزئية $F_1, ..., F_{q+1}$ ، نرى أن الأشعة x_{ij} التي ننشئها بهذه الطريقة، والبالغ عددها $r_1 + r_2 + ... + r_{q+1}$ ، تشكل أساساً لـ E . يمكن كتابة هذا الأساس على شكل جدول كالتالي :

$x_{11} \; ... \; x_{1,r_1}$

$u(x_{11}) \; ... \; u(x_{1,r_1}) \; x_{2,r_1+1} \; ... \; x_{2,r_2}$

. . . .

$u^q(x_{11}) \; ... \; u^q(x_{1,r_1}), u^{q-1}(x_{2,r+1}) \; ... \; u^{q-1}(x_{2,r_2}) \; ... \; x_{q+1,r_{q+1}}$

بكتابة هذه الأشعة عموداً عموداً، إنطلاقاً من الأسفل نجد أذن أساساً $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ لـ E يحقق الخاصية التي تنص على أن لدينا : $u(x_i) = 0$ أو $u(x_i) = x_{i-1}$ وذلك من أجل كل i ؛ نلاحظ أخيراً أن شكل مصفوفة u بالنسبة لهذا الأساس هو الشكل المنصوص عليه في النظرية 3 .

4. نظرية جوردان

قبل تقديم النتيجة النهائية لهذا الفصل ندخل التعريف التالي : نقول عن مصفوفة أنها **مصفوفة مبسطة** (أو أنها **مصفوفة جوردان**) **ذات معاملات في حقل تبديلي** K ، إذا كانت مربعة ومعاملاتها في K وتكتب على الشكل :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \ldots 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

أي أن حدودها القطرية متساوية والحدود الواقعة مباشرة فوق القطر تساوي 1 ؛ أما باقي الحدود فتساوي 0 .

إن المصفوفات التالية، مثلاً:

$$(\lambda) \quad , \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

مصفوفات مبسطة رتبها، من اليسار إلى اليمين، تساوي 1، 2، 3.

نقدم الآن النظرية المنتظرة.

نظرية 4 (جوردان) - ليكن E فضاء شعاعياً، بعده منته، على حقل تبديلي K، وليكن u تماثلاً داخلياً لِـ E. إن الخاصيتين التاليتين متكافئتان:

أ) كل القيم الذاتية لِـ u تنتمي إلى K، أي أن كل جذور كثير الحدود p_u تنتمي إلى K:

ب) يوجد أساس لِـ E يجعل مصفوفة u، بالنسبة اليه، تكتب على الشكل:

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & U_2 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots U_r \end{pmatrix}$$

حيث يرمز U_i لمصفوفة مبسطة معاملاتها في K.

لرؤية ذلك نفرض أن كل القيم الذاتية لِـ u تنتمي إلى K، ولنطبق في البداية النظرية 2؛ ليكن u_i إقتصار u على E_i. من أجل كل i نفرض أننا أنشأنا أساساً $(x_{ij})_{1 \leq j \leq n_i}$ لِـ E_i يجعل مصفوفة u_i بالنسبة إليه، تكتب على الشكل المشار إليه في النظرية؛ عندئذٍ نعتبر أسس مختلف الفضاءات E_i، التي نحصل عليها بهذه الطريقة، فتعطينا بطبيعة الحال أساساً لِـ E يجعل مصفوفة u، بالنسبة إليه، من الشكل المطلوب. وبالتالي يتبين أن الأمر ينحصر في دراسة u_i. نلاحظ أن:

$$u_i = \lambda_i + v_i$$

حيث يرمز v_i لتماثل داخلي معدوم القوة لِـ E_i؛ يكفي إذن أن نبين وجود أساس لِـ E_i يجعل مصفوفة v_i، بالنسبة إليه، تكتب على شكل

جدول قطري من المصفوفات المبسطة ؛ للوصول إلى هذه النتيجة يكفي أن نطبق النظرية 3 على v_i وعلى E_i بتشكيل مصفوفة مبسطة كلما كانت لدينا «سلسلة» من المعاملات v_i تساوي 1 . المصفوفة التالية مثلاً

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

تكتب :

$$\begin{pmatrix} U_1 & 0 & 0 \\ 0 & U_2 & 0 \\ 0 & 0 & U_3 \end{pmatrix}$$

حيث :

$$U_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad U_2 = (0)$$

$$U_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

من الواضح أن هذه الطريقة تبين استلزام أ) لِـ ب) .

للبرهان على أن ب) تستلزم أ) ، نلاحظ بالإعتماد على الملاحظة 4 في ف 34 أن الخاصية ب) تستلزم :

$$p_u(X) = p_{U_1}(X) \dots p_{U_r}(X)$$

لكي نبرهن أن كل جذور p_u تنتمي إلى K ، يكفي إذن أن نبين بأن الأمر كذلك فيما يخص f_U عندما تكون U مصفوفة مبسطة ، وهو أمر واضح كما سبق أن رأينا في الفقرة 5 من ف 34 . وبذلك ينتهي البرهان .

إن الفرض أ) من نظرية جوردان ، وبالتالي الخاصية ب) أيضاً ، محققة

في الحالة التي يكون فيها الحقل K مغلقاً جبرياً. أما في الحالة العامة فالشرط أ) يعني أيضاً (النظرية 3، ف 34) بأن u يقبل التثبيت.

إن نظرية جوردان تنطبق أيضاً، كما هو واضح، على المصفوفات: إذا كانت $\cup$ مصفوفة مربعة رتبتها n، ومعاملاتها في K، وإذا كانت كل القيم الذاتية لِـ $\cup$ منتمية لِـ K، فإنه توجد مصفوفة P تنتمي إلى $GL(n, K)$ بحيث:

$$P \cup P^{-1} = \begin{pmatrix} \cup_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & \cup_2 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots \cup_r \end{pmatrix}$$

حيث ترمز العناصر $\cup_i$ لمصفوفات جوردان.

مثال 2 - لتكن $\cup$ مصفوفة مربعة من الرتبة 4، على حقل K مغلق جبرياً. عندئذٍ تكون $\cup$ مصفوفة تشابه مصفوفة تكتب على شكل من الأشكال التالية:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

عندما ننظر لهذه المصفوفات لأول مرة نشعر أن هناك إحتمالات أخرى، لكن نلاحظ أن هذه الاحتمالات ترجع كلها للحالات السابقة. فالمصفوفة:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

مثلاً ، تشابه المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

كما نرى ذلك بإجراء تبديل للمحاور الإحداثية .

ف. 36. الأشكال الهيرميتية

يمثل K ، في هذا الفصل، حقلاً تبديلياً، ونفرض من جهة أخرى أن لدينا تطبيقاً معطى من K في K ، نرمز له بِـ:

$$\lambda \to \lambda^*$$

وتتوفر فيه الخاصيتان التاليتان: أنه تماثل أي أنه يحقق:

$$\begin{cases} (\lambda + \mu)^* = \lambda^* + \mu^* \\ (\lambda\mu)^* = \lambda^* \mu^* \\ 1^* = 1 \end{cases} \qquad (1)$$

ونفرض أيضاً أنه يحقق:

$$(\lambda^*)^* = \lambda \qquad (2)$$

يسمى هذا التطبيق **تضامناً في** K ، وهو عبارة عن تشاكل ذاتي في الحقل K ، مربعه يساوي التشاكل الذاتي المطابق (حسب (2)).

إن أهم الأمثلة من بين الحالات البسيطة هي:

مثال 1 – (الحالة العمودية الحقيقية). نأخذ $K = \mathbf{R}$ وَ $\lambda^* = \lambda$ مهما كان λ في K.

مثال 2 – (الحالة العمودية العقدية). نأخذ $K = \mathbf{C}$ وَ $\lambda^* = \bar{\lambda}$ مهما كان λ في K.

مثال 3 - (الحالة الهيرميتية العقدية). نأخذ $K = \mathbf{C}$ وَ $\lambda^* = \bar{\lambda}$ مهما كان λ في K.

هذا وتوجد حالات كثيرة أخرى.

مثال 4 - نأخذ $K = Q[\sqrt{d}]$ حيث يمثل d عددا صحيحاً ناطقاً لا يساوي مربعاً كاملاً (ف. 9) ونضع:

$$(a + b\sqrt{d})^* = a - b\sqrt{d}$$

مهما كان a وَ b في $\mathbf{Q}$.

1. الأشكال شبه الخطية، الأشكال الهيرميتية.

ليكن L فضاء شعاعياً على الحقل K. نقول عن تطبيق

$$f: L \times L \to K$$

إنه **شكل شبه خطي** على L (بالنسبة للتضامن المعطى على K) إذا حقق الشرطين المواليين:

(ش خ 1): مهما كان y في L فإن التطبيق $x \to f(x, y)$ من L في K خطي.

(ش خ 2): مهما كان x في L فإن التطبيق $y \to f(x, y)^*$ من L في K خطي.

بإمكاننا تعويض هذين الشرطين بالعلاقات التالية:

$$\begin{cases} f(x' + x'', y) = f(x', y) + f(x'', y) \\ f(\lambda x, y) = \lambda f(x, y) \\ f(x, y' + y'') = f(x, y') + f(x, y'') \\ f(x, \lambda y) = \lambda^* f(x, y) \end{cases}$$

إذا كان التضامن المعطى على K هو التطبيق المطابق فإننا نجد بهذه الطريقة الأشكال الثنائية الخطية المعرفة في ف 21. نقول عن شكل شبه خطي f إنه **هيرميتي إذا كان:**

$$f(x, y) = f(y, x)^* \tag{3}$$

مهما كان x و y في L ؛ لدينا على وجه الخصوص في هذه الحالة :

$$f(x, x)^* = f(x, x) \tag{4}$$

وذلك باعتبار الحالة الهيرميتية العقدية (المثال 3) ، ولذا نستخلص أن العدد $f(x, x)$ حقيقي في جميع الحالات ، لأنه يساوي مرافقه .

إذا كان التضامن المعطي على K هو التطبيق المطابق فإننا نستطيع كتابة العلاقة (3) على النحو :

$$f(x, y) = f(y, x) \tag{5}$$

نقول عندئذ أن f شكل ثنائي الخطية **متناظر** على L .

مثال 5 – ليس من الصعب إنشاء كل الأشكال شبه الخطية على L عندما يكون L ذا بعد منته على K . لنختر من أجل ذلك أساساً $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ لـ L ، وليكن :

$$x = \sum \xi_i \, a_i \, , \quad y = \sum \eta_i \, a_i$$

شعاعين في L . بما أن العبارة :

$$f_y(x) = f(x, y)$$

شكل خطي لـ x ، حسب (ش خ 1) ، فإن :

$$f(x, y) = f_y(\sum \xi_i \, a_i) = \sum \xi_i \, f_y \, (a_i) = \sum \xi_i \, f(a_i, y)$$

لكن لما كان :

$$f_i(y) = f(a_i, y)^*$$

شكل خطي لـ y ، حسب (ش خ 2) ، فإن :

$$f(a_i, y)^* = f_i(\sum \eta_j \, a_j) = \sum_j \eta_j \, f_i(a_j) = \sum_j \eta_j \, f(a_i, a_j)^*$$

وعندما نضع * في كل طرف من العلاقة السابقة نجد :

$$f(a_i, y) = \sum_j f(a_i, a_j)\eta_j^*$$

وهذا بمراعاة (1) وَ (2). هذا وبنقل العلاقة السابقة إلى العبارة الخاصة بـ $f(x, y)$ الواردة أعلاه، يأتي:

$$f(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij}\, \xi_i\, \eta^*{}_j \qquad (6)$$

حيث $\alpha_{ij} = f(a_i, a_j)$

يمكن التأكد بسهولة من القضية العكسية، وهي أنه مهما كانت العناصر α_{ij} في K فإن التابع f المعرف بـ(6) شكل شبه خطي على L.

مثال 6 - نفرض في المثال 5 أن f هيرميتي، ومنه يأتي:

$$\alpha_{ji} = f(a_j, a_i) = f(a_i, a_j)^* = \alpha^*_{ij}$$

بخصوص القضية العكسية، فإن العلاقة:

$$\alpha_{ji} = \alpha^*_{ij} \qquad (7)$$

تستلزم:

$$f(x, y) = \sum \alpha_{ij}\, \xi_i\, \eta_j^* = \sum \alpha_{ji}^*\, \eta_j^*\, \xi_i = \sum (\alpha_{ji}\, \eta_j\, \xi_i^*)^* = f(y, x)^*$$

وهي بالتالي تميز الأشكال الهيرميتية.

عندما نختار التضامن المطابق على K تصبح العلاقة (7):

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \qquad (8)$$

وهي بالتالي تميز الأشكال الثنائية الخطية المتناظرة على L.

مثال 7 - نعتبر الحالة العمودية الحقيقية (المثال 3) وليكن L الفضاء الشعاعي المؤلف من الأشعة التي لها نفس المصدر O في الفضاء المعتاد، إن الجداء السلمي (المثال 3، ف 21)

$$f(x, y) = (x \mid y)$$

شكل ثنائي الخطية متناظر على L.

مثال 8 - نستعمل في النظرية النسبية الشكل الثنائي الخطية على $\mathbf{R}^4$، المعطى بـ :

$$f(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \xi_3 \eta_3 - c\, \xi_4 \eta_4$$

حيث يمثل c سرعة الضوء. يسمى هذا الشكل شكل لورانتز، وهو يدخل في إطار الحالة العمودية الحقيقية.

مثال 9 - نأخذ، في الحالة الهيرميتية العقدية، المجموعة L تساوي الفضاء الشعاعي المؤلف من التوابع $x(t)$ ذات القيم العقدية، المعرفة والمستمرة في المجال $0 \leq t \leq 1$؛ عندئذ يعرف الدستور :

$$f(x, y) = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, dt$$

شكلاً شبه خطي على L (وهو شكل يلعب دوراً بالغ الأهمية في التحليل الرياضي وخاصة في نظرية سلاسل فوريي). نستطيع أيضاً اعتبار :

$$f(x, y) = \int_0^1 \int_0^1 x(s)\, \overline{y(t)}\, K(s, t)\, ds\, dt$$

حيث يمثل K تابعاً معرفاً ومستمراً في المربع $0 \leq s, t \leq 1$، نحتفظ به في المستقبل؛ إن العبارة التي نحصل عليها بهذه الطريقة شكل شبه خطي على L، وهو شكل هيرميتي إذا وفقط إذا حقق التابع K العلاقة :

$$K(t, s) = \overline{K(s, t)}$$

مهما كان s وَ t.

إن الطرق الجبرية المحضة المقدمة في هذا الفصل لا تسمح باثبات خاصيات غير تافهة للأشكال المعرفة في هذا المثال : ذلك أن دراسة تلك الأشكال تتطلب استخدام طرق تحليلية مستوحاة من اعتبارات هذا الفصل، لكنها أكثر تعقيداً، كما نشير إلى أنها تعتبر القاعدة التي يَنطلق منها التحليل التابعي (أو التوابعي) (نظرية فضاءات هيلبرت).

ليكن L فضاء شعاعياً، بعده منته، على K، وليكن f شكلاً شبه خطي على L. باعتبار الأساس $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ لِـ L. تسمى الأعداد السلمية :

$$\alpha_{ij} = f(a_i, a_j)$$

الواردة في الدستور (6) **معاملات** f بالنسبة للأساس المعتبر ، وتسمى المصفوفة المربعة :

$$(\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

مصفوفة f **بالنسبة للأساس المعتبر**

نقول عن مصفوفة مربعة :

$$A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

ذات معاملات في K ، إنها **هيرميتية** (بالنسبة للتضامن المعتبر على K) عندما تكون معاملاتها تحقق العلاقة (7) الواردة أعلاه. إذا كان التضامن المختار على K هو التطبيق المطابق ، أي إذا كان :

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$$

نقول أن المصفوفة A **متناظرة.**

ملاحظة 1 - نقول عن مصفوفة إنها **هيرميتية عقدية** إذا كانت مصفوفة هيرميتية في الحالة الهيرميتية العقدية (المثال 3) ، أي عندما تكون مصفوفة مربعة (α_{ij}) ذات معاملات عقدية بحيث :

$$\alpha_{ji} = \overline{\alpha_{ij}}$$

مهما كان i وَ j. عموماً ، إذا كان $K = \mathbf{C}$ واستعملنا المصطلح «هيرميتي» دون توضيح إضافي ، فإن التضامن المختار على $\mathbf{C}$ هو :

$$\lambda \to \bar{\lambda}$$

وهو الإنتقال من عدد خيالي إلى مرافقه (الخيالي) .

2. الأشكال غير المنحلة

ليكن L فضاء شعاعياً على K وَ f شكلاً شبه خطي على L . من أجل كل y في L ، فإن التابع :

$$f_y(x) = f(x, y) \tag{9}$$

شكل خطي على L حسب (ش خ 1) : ولذا فإن f يعرف تطبيقاً :

$$\hat{f} : y \to f_y \tag{10}$$

من L في ثنويه L^* (الفقرة 1 ، ف 16) . مهما كانت العناصر x ، y ، z في L لدينا :

$$f_{y+z}(x) = f(x, y+z) = f(x, y) + f(x, z) = f_y(x) + f_z(x)$$

إذن :

$$f_{y+z} = f_y + f_z$$

أو :

$$\hat{f}(y+z) = \hat{f}(y) + \hat{f}(z) \tag{11}$$

ومن جهة ثانية ، لدينا :

$$f_{\lambda y}(x) = f(x, \lambda y) = \lambda^* \cdot f(x, y) = \lambda^* \cdot f_y(x)$$

وبالتالي :

$$\hat{f}(\lambda y) = \lambda^* \cdot \hat{f}(y) \tag{12}$$

مهما كان λ في K وَ y في L . إذا كان التضامن المختار على K هو التطبيق المطابق (وهي حالة الأشكال الثنائية الخطية) ، نرى عندئذ أن $\hat{f}$ تماثل من الفضاء الشعاعي L في الفضاء الشعاعي L . أما الحالة العامة فهي ليست كذلك ، فنعبر على العلاقتين (11) وَ (12) بالقول أن التطبيق $\hat{f}$ من L في ثنويه L^* ، تطبيق **نصف خطي** عندما يكون البعد منتهياً ، فإن التطبيقات نصف الخطية تتمتع (بعد إجراء بعض التغيرات البديهية) بنفس الخاصيات التي تتمتع بها التطبيقات الخطية .

إن نواة $\hat{f}$ ، وهي مجموعة العناصر y من L بحيث $\hat{f}(y) = 0$ ، تساوي أيضاً مجموعة العناصر y في L بحيث :

$$f(x, y) = 0 \qquad \forall x \in L \tag{13}$$

نقول عن شكل شبه خطي f إنه **غير منحل** إذا اقتضت العلاقة (13) المساواة $y = 0$ ، أي إذا كان التطبيق $\hat{f}$ من L في ثنويه L^* ، متبايناً .

نظرية 1 - ليكن L فضاء شعاعياً بعده منته على K وليكن f شكلاً شبه خطي على L ، وَ $A = (\alpha_{ij})$ مصفوفة f بالنسبة لأساس لِـ L . إن الخاصيات التالية متكافئة :

أ) العلاقة :

$$f(x, y) = 0 \qquad \forall\, x \in L$$

تستلزم $y = 0$.

ب) العلاقة :

$$f(x, y) = 0 \qquad \forall\, y \in L$$

تستلزم $x = 0$.

ج) المصفوفة A تقبل القلب ، أي أن :

$$\text{dét}\,(\alpha_{ij}) \neq 0 \,.$$

د) التطبيق $\hat{f}$ من L في ثنوية ، تطبيق تقابلي ، أي من أجل كل شكل خطي u على L ، يوجد عنصر وحيد y في L بحيث :

$$u(x) = f(x, y) \qquad \forall x \in L$$

باستعمال رموز المثال 5 ، نجد أن العناصر y التي تحقق $f(x, y) = 0$ من أجل كل x ، تمثل حلول جملة المعادلات :

$$\sum_j \alpha_{ij}\, \eta_j^* = 0 \qquad (1 \leq i \leq n) \tag{14}$$

كما أن العناصر x التي تحقق $f(x, y) = 0$ من أجل كل y ، تمثل حلول جملة المعادلات :

$$\sum \alpha_{ij}\, \xi_i = 0 \qquad (1 \leq j \leq n) \tag{15}$$

فيما يخص الشرط د) ، إذا وضعنا $u(a_i) = v_i$ ، يرجع الأمر إلى تعيين y

بحيث تتحقق المساواة $f(a_i, y) = \nu_i$ مهما كان i ، أي إلى حل جملة المعادلات :

$$\sum \alpha_{ij}\, \eta_j^* = \nu_i \qquad (1 \le i \le n) \tag{16}$$

بعد هذا، نجد أن الخاصية د) تعني أن الجملة (16) تقبل حلاً وحيداً مهما كانت الأطراف الثانية ؛ أما تكافؤ هذه الخاصية مع الخاصيتين ج) وَ أ) ، والذي يعبر على أن الجملة (14) لا تقبل من الحلول سوى الحل التافه ، فهو ناتج إذن من النظرية 2 في ف 20 . هذا وتعني الخاصية ب) أن الجملة (15) لا تقبل من الحلول سوى الحل التافه ، وبالتالي فالمصفوفة (α_{ij}) تقبل القلب . وبما أن هذه المصفوفة تمثل منقولة المصفوفة (α_{ij}) نرى بأن ب) وَ ج) متكافئان ، وبذلك ينتهي البرهان .

ملاحظة 2 – لما كانت الخاصية أ) تعني أن نواة f منعدمة ، فإن تكافؤ أ) وَ د) ناتج أيضاً من النتيجة 1 للنظرية 13 في ف 19 (وهي نتيجة نستطيع تعميمها بسهولة لتشمل التطبيقات نصف الخطية) .

مثال 10 – إن شكل لورانتز (المثال 8) شكل غير منحل لأن مصفوفته بالنسبة للأساس القانوني لِـ $\mathbf{R}^4$ هي :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c \end{pmatrix}$$

ولذا فهي قابلة للقلب لأن c غير منعدم .

3. قرين تماثل

ليكن L وَ M فضاءين شعاعيين ، بعداهما منتهيان على K ، وَ f وَ g شكلين شبه خطيين غير منحلين على L وَ M بالترتيب .

ليكن u تماثلاً من L في M ، نعتبر العبارة :

$$g(u(x), y)$$

من أجل x في L وَ y في M ؛ إنها شكل خطي لِـ x عندما يكون y معطى في M ، وبالتالي تبين الخاصية د) من النظرية 1 أنه مهما كان y في M ، يوجد عنصر وحيد y' في L بحيث :

$$g(u(x), y) = f(x, y') \qquad \forall\, x \in L$$

بوضع $y' = u^*(y)$ نعرف تطبيقاً :

$$u^* : M \rightarrow L$$

وبالتالي نحصل على العلاقة :

$$f(x, u^*(y)) = g(u(x), y) \qquad \forall\, x \in L, y \in M \tag{17}$$

إن التطبيق u^* خطي مثل u ، ذلك أنه مهما كان y وَ z في M فإن :

$$f(x, u^*(y + z)) = g(u(x), y + z) = g(u(x), y) + g(u(x), z)$$
$$= f(x, u^*(y)) + f(x, u^*(z)) = f(x, u^*(y) + u^*(z))$$

ومنه تأتي العلاقة $u^*(y + z) = u^*(y) + u^*(z)$ ؛ كما أن لدينا :

$$f(x, u^*(\lambda y)) = g(u(x), \lambda y) = \lambda^* g(u(x), y)$$
$$= \lambda^* f(x, u^*(y)) = f(x, \lambda u^*(y))$$

وهو ما يبين أن $u^*(\lambda y) = \lambda u^*(y)$ وبذلك نصل إلى المطلوب .

يسمى التماثل :

$$u^* : M \rightarrow L$$

المعرف بِـ(17) قرين التماثل :

$$u : L \rightarrow M$$

بالنسبة للشكلين f وَ g . نقول عن u ، في الحالة الخاصة التي يكون فيها $L = M$ وَ $f = g$ ، إنه قرين u بالنسبة لِـ f .

المفهوم الذي يقابل قرين تماثل في نظرية المصفوفات هي قرينة مصفوفة . نفرض فيما سبق أن L يقبل أساساً $(a_i)_{1 \le i \le p}$ يجعل عبارة f تكتب على النحو :

$$f(x, y) = \sum_{1 \le i \le p} \xi_i \, \eta_i^*$$

وأن M يقبل أيضاً أساساً $(b_j)_{1 \le j \le q}$ يجعل عبارة g تكتب على النحو :

$$g(z, t) = \sum_{1 \le j \le q} \zeta_j \, \tau_j^*$$

لتكن أخيراً :

$$A = (\alpha_{ij})_{1 \le i \le p,\, 1 \le j \le q}$$

$$B = (\beta_{ji})_{1 \le j \le q,\, 1 \le i \le p}$$

مصفوفتي u وَ u^* بالنسبة للأساسين المعتبرين . نعتبر أيضاً الشعاعين :

$$x = \sum \xi_i \, a_i \quad , \; y = \sum \eta_j \, b_j$$

فنحصل على :

$$u(x) = \sum \alpha_{ij} \, \xi_i \, b_j \quad , \; u^*(y) = \sum \beta_{ji} \, \eta_i \, a_i$$

وبالتالي :

$$g\big(u(x), y\big) = \sum \alpha_{ij} \, \xi_i \, \eta_j^*$$

$$f\big(x, u^*(y)\big) = \sum \xi_i \, \beta_{ji}^* \, \eta_j^*$$

إذا كتبنا $g\big(u(x), y\big) = f\big(x, u^*(y)\big)$ مهما كان x وَ y فإننا نستنتج العلاقة :

$$\beta_{ji}^* = \alpha_{ij}$$

$$\beta_{ji} = \alpha_{ij}^*$$

بحيث نلاحظ أننا نحصل على B بتحويل عناصر المصفوفة A ، التي تمثل

منقولة A ، بواسطة تضامن لِـ K . نقول عن B إنها قرينة المصفوفة A بالنسبة للتضامن المعطى ، ونكتب :

$$B = A^*$$

(هذا ، وإذا كان التضامن المختار على K هو التطبيق المطابق ، في الحالة العمودية الحقيقية أو العمودية العقدية مثلاً فإننا نستعمل لفظ منقول بدل قرين كما نستخدم الرمز ^tA بدل A^*) .

ففي الحالة الهيرميتية العقدية ، مثلاً ، تكون **قرينة المصفوفة العقدية** A هي المصفوفة :

$$A^* = {}^t\overline{A}$$

أي منقولة المصفوفة الخيالية المرافقة لِـ A .

ملاحظة 3 - نستطيع حساب مصفوفة u^* بدلالة مصفوفة u دون فرض شروط على الأساسين المختارين في L وَ M (يقتضي الحساب السابق أن يكون الأساسان «متعامدان ومتجانسان» من أجل f وَ g ، كما سنرى ذلك مستقبلاً) . أنظر التمرين 11 .

إن قواعد الحساب الخاصة بالمصفوفات القرينة تماثل قواعد المصفوفات المنقولة - لدينا على وجه التحديد العلاقات :

$$(A + B)^* = A^* + B^* \ ; \ (\lambda A)^* = \lambda^* A^*$$
$$(AB)^* = B^* A^* \ ; \ 1_n^* = 1_n$$
$$(A^*)^* = A$$

للحصول على هذه العلاقات نكتب الدساتير الخاصة بالمصفوفات المنقولة (النظرية 4 ، ف 16) ثم نحوّل النتائج التي نحصل عليها بواسطة التشاكل الذاتي :

$$\lambda \to \lambda^*$$

لِـ K .

نستطيع أيضاً إثبات دساتير مماثلة خاصة بالتماثلات نفسها . إذا كان u وَ v ، مثلاً ، تماثلين من L في M فإن :

$$(\lambda u + \mu v)^* = \lambda^* u^* + \mu^* v^*$$

مهما كان العددان السلميان λ وَ μ. إذا كان L ، M ، N ثلاثة فضاءات شعاعية أبعادها منتهية على K ، مزوّدة بأشكال شبه خطية غير منحلة f ، g ، h ، وإذا كان $u : L \to M$ وَ $v : M \to N$ تماثلين فإن لدينا أيضاً الدستور :

$$(v \circ u)^* = u^* \circ v^*$$

لرؤية ذلك نضع : $v \circ u = w$ فيأتي :

$$f(x, w^*(z)) = h(w(x), z) = h\Big(v\big(u(x)\big), z\Big)$$
$$= g\big(u(x), v^*(z)\big) = f\Big(x, u^*\big(v^*(z)\big)\Big)$$

ومنه النتيجة المطلوبة.

إن الدستور «البديهي» :

$$(u^*)^* = u$$

حيث يرمز u لتماثل من L في M لا يكون صالحاً إلّا إذا كان f وَ g هيرميتيين. للتأكد من ذلك نضع $v = u^*$ ؛ إن هذا التماثل من M في L معطى إذن بالعلاقة (17) التي يجب أن نستبدل فيها f بِـ g ، وَ g بِـ f ، وَ u بِـ v ، أي أنه معطى بالعلاقة :

$$g\big(y, v^*(x)\big) = f\big(v(y), x\big)$$

إذا كان f هيرميتياً ، فإن الطرف الثاني يكتب أيضاً على الشكل :

$$f\big(x, v(y)\big)^* = f\big(x, u^*(y)\big)^* = g\big(u(x), y\big)^*$$

حسب (17) ؛ بالإضافة إلى ذلك إذا كان g هيرميتياً فإننا نجد في الأخير :

$$g\big(y, v^*(x)\big) = g\big(y, u(x)\big)$$

ومنه تأتي النتيجة المطلوبة أي أن $v^* = u$ عندما يكون $v = u^*$.

4. التعامد بالنسبة لشكل هيرميتي غير منحل

ليكن f شكلا هيرميتياً على فضـاء شعاعي L على K . نقول عن شعاعين x ، y من L انهما **متعامدان** بالنسبة لِـf إذا تحققت العلاقة :

$$f(x, y) = 0$$

نجد في المثال 7 المفهوم المعتاد لأن $(x|y)$ يمثل جداء طولي. x وَ y وَ جيب تمام زاويتهما وعليه فهو لا ينعدم إلاّ إذا إنعدم أحد الشعاعين أو إذا كانت زاويتهما من مضـاعفات $\pi/2$.

إذا كان x وَ y متعامدين ، فإن :

$$f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(y, y) \tag{17}$$

لأن لدينا العلاقة التالية في جميع الحالات :

$$\begin{aligned} f(x + y, x + y) &= f(x, x) + f(y, y) + f(y, x) + f(x, y) + f(y, y) \\ &= f(x, x) + f(x, y) + f(x, y)^* + f(y, y) \end{aligned}$$

ذلك أن f هيرميتي . تعني العلاقة السـابقة في المثال 7 أن مربع طول $x + y$ يسـاوي مجموع مربعي طولي x وَ y ، أي أنها تمثل نظرية فيثاغورس .

ليكن M فضـاء شعاعياً جزئياً من L ؛ نعرف **عمودي** M بالنسبة لِـf على أنه المجموعة التي نرمز لها عموماً بِـ :

$$M^{\perp}$$

المؤلفة من العناصر x المنتمية لِـL والعمودية على كل عنصر y من M . إنه فضـاء شعاعي جزئي من L حسب (ش خ 1) . في حالة المثال 7 ، إذا كان M مستقيماً (مستوياً ، بالترتيب) يمر بنقطة المصدر ، فإن $M^{\perp}$ هو المستوى (المستقيم على الترتيب) العمودي على M والمـار بنقطة المصدر .

لدينا دوماً العلاقة :

$$M \subset (M^{\perp})^{\perp} \tag{18}$$

لأن $(M^{\perp})^{\perp}$ يتألف من العناصر z في L العمودية على كل العناصر y المنتمية لِـ $M^{\perp}$ ؛ وبما أن هذه العناصر عمودية على العناصر x المنتمية لِـ M فمن الواضح أن كل العناصر x من M تنتمي حتماً إلى $(M^{\perp})^{\perp}$.

نظرية 2 - ليكن f شكلاً هيرميتياً غير منحل على فضـاء شعاعي L ، بعده منته على K ؛ لدينا عندئذ :

$$(M^{\perp})^{\perp} = M$$

مهما كان الفضـاء الشعاعي الجزئي M من L .

يكفي أن نثبت صحة الإحتواء في الإتجاه المعاكس لِـ(18)، أي أن نثبت أن كل z في $(M^{\perp})^{\perp}$ ينتمي إلى M ؛ من أجل ذلك يكفي (النظرية 3 ، ف 19) أن نبين أنه إذا كان u شكلاً خطياً على L منعدماً على M فإن $u(z) = 0$. لكن الخاصية د) من النظرية 1 تبين أننا نستطيع أن نكتب :

$$u(x) = f(x, y)$$

من أجل عنصر y في L ؛ من جهة أخرى نلاحظ أن معنى فرض إنعدام u على M هو أن $y \in M^{\perp}$ ، أما كون $u(z) = 0$ أي كون $f(z, y) = 0$ فهو ناتج بداهة من الفرض القائل أن z عمودي على $M^{\perp}$ ، وبذلك ينتهي البرهان .

نظرية 3 - ليكن M وَ N فضـاءين شعاعيين جزئيين من L . لدينا تحت فروض النظرية 2 ، العلاقتان :

$$(M + N)^{\perp} = M^{\perp} \cap N^{\perp}$$
$$(M \cap N)^{\perp} = M^{\perp} + N^{\perp}$$

بما أن $M + N$ يتألف من العناصر $x + y$ حيث $x \in M$ وَ $y \in N$ ، وبما أن :

$$f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z)$$

فإن العلاقة الأولى تأتي مباشرة. للحصول على العلاقة الثانية ، نستبدل M وَ N بِـ $M^{\perp}$ وَ $N^{\perp}$ في العلاقة الأولى ، وعندها يأتي :

$$(M^{\perp} + N^{\perp})^{\perp} = (M^{\perp})^{\perp} \cap (N^{\perp})^{\perp} = M \cap N$$

وذلك حسب النظرية 2 ، ثم باستخدام هذه النظرية مرة ثانية نحصل على المطلوب .

نظرية 4 – ليَكن f شكلاً هيرميتياً غير منحل على فضـاء شعاعي L بعده منته على K . لدينا عندئذ :

$$\dim(M) + \dim(M^{\perp}) = \dim(L)$$

مهما كان الفضـاء الشعاعي الجزئي M من L .

نعلم أنه إذا رمزنا بِـM° لعمودي M في الثنوي L^* لِـL أي لمجموعة الأشكال الخطية u على L التي تحقق :

$$u(x) = 0 \qquad \forall\, x \in M \tag{19}$$

فإن :

$$\dim(M) + \dim(M^{\circ}) = \dim(L)$$

حسب النظرية 9 في ف 19 . وبذلك نرى أن الأمر يتمثل في البرهان على أن لِـ$M^{\perp}$ وَ M° نفس البعد . إلاّ إنه إذا تعاطينا شكلاً خطياً u على L ، نلاحظ أنه يوجد y في L وحيد (النظرية 1) بحيث : $u(x) = f(x, y)$ مهما كان x في L ، ومنه نرى أن العلاقة (19) تكافئ $y \in M^{\perp}$ ؛ وبالتالي فإن التطبيق $\hat{f}$ ، الذي أدخل في الفقرة 2 ، يطبق $M^{\perp}$ على M° ، ولذا يوجد تطبيق نصف خطي وتقابلي من $M^{\perp}$ على M° ، ومنه يتضح أن لهذين الفضـاءين الشعاعيين نفس البعد ، وهو المطلوب .

نظرية 5 – ليكن f شكلاً هيرميتياً على فضـاء شعاعي L على K . وليكن M فضـاء جزئياً من L . عندئذ تكون الخاصيات التالية متكافئة :

أ) لدينا $M \cap M^{\perp} = 0$

ب) إقتصـار f على M شكل هيرميتي غير منحل على M .

ج) الفضـاء L مجموع مباشر للفضـاءين الجزئيين M وَ $M^{\perp}$ ، أي أن كل x في L يكتب بطريقة وحيدة على الشكل :

$$x = y + z \quad ; \quad y \in M, z \in M^{\perp}$$

زيادة على ذلك، إذا كان f غير منحل فإن الشروط السابقة تكافئ الشرط الموالي :

د) الفضاء L مجموع للفضاءين الجزئيين M وَ $M^{\perp}$، أي أن كل x من L يكتب بطريقة على الأقل، على النحو :

$$x = y + z \quad ; \quad y \in M, z \in M$$

للبرهان على هذه النظرية، نلاحظ في البداية أن العناصر x المنتمية لِـ $M \cap M^{\perp}$ هي العناصر x المنتمية لِـ M والتي تحقق :

$$f(x, y) = 0, \forall\, y \in M$$

ومنه يتضح تكافؤ الشرطين أ) وَ ب) . كما يتضح أن الشرط ج) ، أي العلاقة :

$$L = M \oplus M^{\perp}$$

تستلزم أ) . لكي ننهي البرهان على تكافؤ الشروط أ) ، ب) ج) يكفي إذن أن نبين بأن ب) تستلزم ج) . بما أن ج) عبارة عن أ) وَ د) معاً (حسب النظرية 1 ، ف 17) ، وبما أننا نعلم من قبل أن ب) يستلزم أ) فإنه يكفي أن نثبت بأن ب) يقتضي د) .

من أجل ذلك نأخذ عنصراً x في L ونعتبر على M التابع :

$$u(y) = f(y, x)$$

الذي يمثل شكلاً خطياً على M ، بما أن إقتصار f على M غير منحل، فإن النظرية 1 تبين أنه يوجد عنصر x' في M بحيث :

$$u(y) = f(y, x') \qquad \forall\, y \in M$$

لدينا إذن :

$$f(y, x) = f(y, x')$$

أو :

$$f(y, x - x') = 0$$

مهما كان y في M ، وبالتالي $x - x'$ ينتمي إلى $M^{\perp}$. لما كان x' في M فإن الشرط د) محقق.

لنفرض الآن أن f غير منحل، وأن د) محقق، ولنكتب (النتيجة 2 للنظرية 13 ، ف 19) العلاقة :

$$\dim(M + M^{\perp}) = \dim(M) + \dim(M^{\perp}) - \dim(M \cap M^{\perp})$$

إن طرفها الأيسر يساوي $\dim(L)$ فرضاً، ثم بمراعاة النظرية 4 نرى إذن أن $\dim(M \cap M^{\perp}) = 0$. وهكذا يتضح أن د) يستلزم أ) ، وبذلك ينتهي البرهان.

نشير إلى أنه عندما يكون f غير منحل، فإن العلاقة الواردة آنفاً تكتب كما يلي :

$$\dim(M + M^{\perp}) = \dim(L) - \dim(M \cap M^{\perp})$$

بحيث أن التكافؤ بين الخاصيات أ) ، ج) ، د) يُصبح في هذه الحالة في غاية الوضوح. لكننا نحتاج في بعض الأحيان، من الناحية العملية إلى النظرية 5 عند تناول الأشكال المنحلة؛ من جهة أخرى تعمم خطوات البرهان الخاص باستلزام ب) لِـ د) إلى فضاءات هيلبرت (وهي فضاءات شعاعية عقدية أبعادها غير منتهية، مزودة بشكل هيرميتي معرف موجب، وهي تلعب دوراً أساسياً في التحليل).

نعتبر من جديد شكلاً هيرميتياً f غير منحل على فضاء شعاعي L بعده منته على K .

نقول عن فضاء شعاعي جزئي M من L إنه **متساوي الإتجاه** عندما يكون :

$$M \cap M^{\perp} \neq 0$$

ونقول عنه أنه غير **متساوي الإتجاه** عندما يكون :

$$M \cap M^{\perp} = 0$$

إن النظرية 5 تعني إذن بأن لدينا :

(مجموع مباشر) $L = M \oplus M^{\perp}$.

إذا وفقط إذا كان M غير متساوي الإتجاه. وفي هذه الحالة تُبين الفقرة 4 من ف 17 أنه يوجد تماثل داخلي P_M للفضاء الشعاعي L يحقق الشروط التالية :

$$P_M \circ P_M = P_M$$
$$P_M(L) = M$$
$$P_M(M^{\perp}) = 0 \text{ ؛}$$

لدينا العلاقة التالية من أجل كل x في L :

$$x = P_M(x) + y \quad ; \quad y \in M^{\perp}$$

وهي علاقة تميز P_M - بعبارة أدق نقول إن $P_M(x)$ هو عنصر M الوحيد الذي يجعل $x - P_M(x)$ عمودياً على M . نقول عن $P_M(x)$ إنه **المسقط العمودي لِـ** x على M ، وعن P_M أنه مؤثر **الإسقاط العمودي** على M .

مثال 11 . إذا كان M هو المستقيم المولد عن شعاع a من L ، فمن الواضح أن M يكون متساوي الإتجاه إذا وفقط إذا كان :

$$f(a, a) = 0$$

نقول عندئذ أن a **شعاع متساوي الإتجاه** من أجل f ، وتسمى مجموعة هذه الأشعة والتي هي إتحاد مستقيات تمر بِـ0) **المخروط المتساوي الإتجاه لِـ** f .
إذا كان f هو شكل لورانتز مثلاً ، فإن المخروط السالف الذكر يتألف من النقاط (x, y, z, t) المنتمية لِـ $\mathbf{R}^4$ والمحققة لِـ :

$$x^2 + y^2 + z^2 - ct^2 = 0$$

أما فيما يخص المثال 7 (أي الجداء السلمي في الفضاء المعتاد) فالشعاع المتساوي الاتجاه هو 0 ولا وجود لغيره - من جهة أخرى يتضح أنه إذا كانت x ، y ، z ثلاثة أعداد حقيقية تحقق العلاقة :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

فإن : $x = y = z = 0$. (نلاحظ أن لهذه المعادلة حلولاً عقدية غير تافهة.)

لنعد إلى الحالة العامة ، ولنعتبر شعاعاً a غير متساوي الإتجاه من أجل f . إن المسقط العمودي لكل عنصر x من L على المستقيم M المولد عن a ، معطى حتماً بالدستور :

$$P_M(x) = \frac{f(x, a)}{f(a, a)} \cdot a$$

ذلك أن الطرف الأيمن ينتمي إلى M ولدينا :

$$f\big(x - P_M(x), a\big) = f(x, a) - \frac{f(x, a)}{f(a, a)} \cdot f(a, a) = 0$$

وهو ما يبين أن $x - P_M(x)$ عمودي على M .

نتيجة للنظرية 5 - ليكن f شكلاً هيرميتياً على فضاء شعاعي L ، بعده منته على K . إن الخاصيتين التاليتين متكافئتان :

أ) من أجل x في L ، فإن العلاقة $f(x, x) = 0$ تستلزم $x = 0$ (أي أن f لا يقبل أي شعاع متساوي الإتجاه غير منعدم) .

ب) لدينا :

$$L = M \oplus M^{\perp}$$

مهما كان الفضاء الشعاعي الجزئي M من L .

من الواضح أنه مهما كان الفضاء الجزئي M من L ، فإن الفضاء الجزئي $M \cap M^{\perp}$ يتكون من الأشعة المتساوية الإتجاه ، وعليه فالخاصية أ) تستلزم :

$$M \cap M^{\perp} = 0$$

وبالتالي تستلزم ب) حسب النظرية 5. نحصل الإستلزام في الإتجاه الثاني بكتابة :

$$M \cap M^{\perp} = 0$$

مهما كان الفضاء الجزئي M من L بحيث $\dim(M) = 1$.

ملاحظة 4 - نفرض أن K مغلق جبرياً وَ $\lambda^* = \lambda$ مهما كان λ في K . إذا

كان f شكلاً هيرميتياً (أي ثنائي الخطية متناظر ؛ وذلك نظراً لما فرضناه على تضامن K) و $\dim(L) \geq 2$ فإنه توجد دوماً أشعة متساوية الإتجاه غير منعدمة من أجل f .

لرؤية ذلك نلاحظ أننا نستطيع إختيار شعاعيين a و b غير متناسبين في L وذلك لأن $\dim(L) \geq 2$. من أجل λ في K ، لدينا :

$$f(a\lambda + b, a\lambda + b) = f(a, a)\,\lambda^2 + 2\,f(a, a)\lambda + f(b, b)$$

إذا كان a متساوي الإتجاه فليس هناك ما يتطلب برهاناً ؛ أما إذا كان a غير متساوي الإتجاه، نرى أن العناصر λ المنتمية لِـK التي من أجلها تكون الأشعة $a\lambda + b$ مستاوية الإتجاه تمثل جذور معادلة من الدرجة الثانية . لما كان K مغلقاً جبرياً فإن المعادلة المعتبرة تقبل على الأقل جذراً والشعاع المتساوي الإتجاه $a\lambda + b$ الذي يوافقها غير منعدم لأن a وَ b غير متناسبين .

تنطبق هذه الملاحظة ، على وجه الخصوص ، في الحالة العمودية العقدية .

5. الأسس العمودية :

ليكن L فضاء شعاعياً بعده منته على K وَ f شكلاً هيرميتياً على L .
نقول عن أساس $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ لِـL إنه **أساس عمودي لِـ** L (بالنسبة لِـf) ، إذا حقق :

$$f(a_i\,, a_j) = 0 \quad ; \; i \neq j$$

ويعني ذلك أن مصفوفة f بالنسبة للأساس المعتبر ، مصفوفة قطرية ، كما يعني أن عبارة f بالنسبة لهذا الأساس عبارة من الشكل :

$$. \; f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \alpha_i\, \xi_i\, \eta_i^* \qquad (20)$$

إن الأساس القانوني لِـ$\mathbf{R}^4$ مثلاً ، عمودي بالنسبة لشكل لورانتز .

نظرية 6 - ليكن f شكلاً هيرميتياً على فضاء شعاعي L بعده منته على

K . إذا كانت مميزة K تخالف 2 ، فإنه يوجد أساس لـ L عمودي بالنسبة لـ f .

النظرية تافهة في حالة $f = 0$ ، ولذا نفرض أن $f \neq 0$. ليس هناك ما يستدعي برهاناً إذا كان $\dim(L) = 1$ ولذا نتبع طريقة البرهان بالتدريج على $\dim(L) = n$.

نفرض أننا وجدنا شعاعاً a_1 من L غير متساوي الإتجاه من أجل f . عندئذ يكون L (النظرية 5) مجموعاً مباشراً للمستقيم المولد عن a_1 وللمستوى المصعد L' العمودي على المستقيم السالف الذكر . لما كان $\dim(L') = n - 1$ فإن فرض التدريج يبين أن L' يقبل أساساً $(a_2, \dots, a_n)$ عمودياً بالنسبة للاقتصار f' لـ f على L' . من الواضح إذن أن $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ أساس لـ L عمودي بالنسبة لـ f .

لإنهاء البرهان يبقى إثبات النتيجة التالية :

لازمة - ليكن f شكلاً هيرميتياً على فضاء شعاعي L على K ، نفرض أن مميزة K تخالف 2 . إذا كان f غير منعدم ، تُوجد في L أشعة غير متساوية الاتجاه من أجل f .

أي أنه إذا كان $f \neq 0$ وَ $f(x, x) = 0$ مهما كان x في L ، فإن مميزة K تساوي 2 . لرؤية ذلك نفرض أن $f(x, x) = 0$ مهما كان x في L ؛ تبين العلاقة :

$$f(x + y, x + y) = f(x, x) + f(x, y) + f(x, y)^* + f(y, y)$$

أن لدينا :

$$f(x, y) + f(x, y)^* = 0$$

مهما كان x وَ y في L . بتعويض x بـ tx حيث t في K ، نرى أن العدد السلمي $u = f(x, y)$ يحقق :

$$tu + (tu)^* = 0 \qquad \forall\, t \in K$$

إذا كان $f \neq 0$. نستطيع إختيار x وَ y بحيث $u \neq 0$ ؛ وبأخذ $t = u^{-1}$ نجد :

$$0 = 1 + 1^* = 1 + 1$$

وهو ما يبين أن مميزة K تساوي 2.

ملاحظة 5 - إذا كانت مميزة K تساوي 2، وكان تضامن K هو التطبيق المطابق، فإن كل شكل متناوب متناظر حتماً، وكل شعاع x من L متساوي الإتجاه بالنسبة لذلك الشكل. ولذا فإن فرض مميزة K تخالف 2 فرض أساسي لضمان صحة النص السابق، وهو محقق دوماً من الناحية «العملية».

نتيجة 1 - ليكن f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً على فضاء شعاعي L، بعده n منته، على K. نفرض أن K مغلقاً جبرياً ومميزته تخالف 2 ($K = \mathbb{C}$ مثلاً). عندئذ يوجد أساس لـ L بحيث تصير عبارة f بالنسبة لهذا الأساس من الشكل:

$$f(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \xi_2 \eta_2 + \dots + \xi_r \eta_r$$

حيث يرمز r لعدد صحيح أقل من n. حتى يكون f غير منحل يجب ويكفي أن يكون $r = n$.

للبرهان على ذلك، نختار أساساً $(b_i)_{1 \le i \le n}$ عمودياً من أجل f، نستطيع أن نفرض:

$$f(b_i, b_i) = \beta_i \neq 0 \ ; \ 1 \le i \le r$$

$$f(b_i, b_i) = 0 \ ; \ r + 1 \le i \le n$$

لما كان K مغلقاً جبرياً، فإنه توجد عناصر λ_i في K $(1 \le i \le r)$ تحقق:

$$\lambda_i^2 f(b_i, b_i) = 1 \ ; \ 1 \le i \le r$$

وهذا يعني، نظراً لكون f ثنائي الخطية، أن الأشعة $a_i = \lambda_i b_i$ تحقق:

$$f(a_i, a_i) = 1 \ ; \ 1 \le i \le r$$

وبالتالي فإن الأساس $(a_1, \dots, a_r, b_{r+1}, \dots, b_n)$ يحقق شروط النتيجة 1.

إذا كان $r < n$ فمن الواضح أن b_n عمودي على كل العناصر b_i (بحيث $1 \le i \le n$) ومنه، على كل عنصر x من L. وعليه فإن f منحل، لدينا

إذن $n = r$ في الحالة التي يكون فيها f غير منحل. بالنسبة للقضية العكسية، إذا كان $n = r$ نجد أن مصفوفة f بالنسبة للأساس الذي أنشأناه آنفاً هي المصفوفة الواحدية، وعليه فهي تقبل القلب ولذا فإن f غير منحل.

ملاحظة 6 - بصفة أعم لكي يكون الشكل (20) غير منحل يجب ويكفي أن يكون $\alpha_i \neq 0$ من أجل $1 \leq i \leq n$، لأنه يجب التعبير على أن مصفوفة f بالنسبة للأساس المعتبر تقبل القلب.

نتيجة 2 - ليكن f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً على فضاء شعاعي حقيقي L، بعده n منته. يوجد عددان صحيحان p و q بحيث $p + q \leq n$، وأساس لـ L بحيث تكون عبارة f بالنسبة لهذا الأساس هي:

$$f(x, y) = \xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_p \eta_p - \xi_{p+1} \eta_{p+1} - \dots - \xi_{p+q} \eta_{p+q}$$

زيادة على ذلك يكون f غير منحل إذا وفقط إذا كان $p + q = n$.

البرهان على هذه النتيجة شبيه ببرهان النتيجة السابقة؛ نختار أساساً (b_i) لـ L عمودياً من أجل f، نستطيع فرض:

$$f(b_i, b_i) > 0 \ ; \ 1 \leq i \leq p$$
$$f(b_i, b_i) < 0 \ ; \ p + 1 \leq i \leq p + q$$
$$f(b_i, b_i) = 0 \ ; \ p + q + 1 \leq i \leq n$$

$$a_i = \begin{cases} \dfrac{b_i}{\sqrt{f(b_i, b_i)}} & ; \ 1 \leq i \leq p \\ \dfrac{b_i}{\sqrt{f(b_i, b_i)}} & ; \ p + 1 \leq i \leq p + q \\ b_i & ; \ p + q + 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

نجد أساساً لـ L يجعل عبارة f بالنسبة إليه تكتب على الشكل الوارد في نص النتيجة 2. أما كون $n = p + q$ يمثل شرطاً لازماً وكافياً ليكون f غير منحل، فذلك يأتي من الملاحظة 6.

نتيجة 3 – ليكن f شكلاً هيرميتياً على فضاء شعاعي عقدي، بعده n منته. عندئذ يوجد عددان صحيحان p و q بحيث $n \geq q + p$، وأساس L بحيث تصير عبارة f بالنسبة لهذا الأساس من الشكل:

$$f(x, y) = \xi_1 \bar{\eta}_1 + \dots + \xi_p \bar{\eta}_p - \xi_{p+1} \bar{\eta}_{p+1} - \dots - \xi_{p+q} \bar{\eta}_{p+q}$$

زيادة على ذلك، يكون f غير منحل إذا وفقط إذا كان $n = p + q$.

إن البرهان على هذه النتيجة مطابق للبرهان السابق، وذلك نظراً لأن $f(x, x)$ عدد حقيقي مهما كان x في L كما سبق أن رأينا في العلاقة (4) من الفقرة 1.

نستطيع أن نبين (نظرية القصور) بأن العددين p و q الواردين في النصوص السابقة لا تتعلق إلا بـ f، وأنها غير متعلقة باختيار الأساس؛ راجع التمرين 24.

6. الأسس المتعامدة والمتجانسة:

ليكن f شكلاً هيرميتياً على فضاء شعاعي L، بعده منته على K. نقول عن أساس (a_i) لـ L أنه **متعامد ومتجانس** بالنسبة لـ f، إذا كان لدينا:

$$f(a_i, a_j) = \begin{cases} 0 & ; i \neq j \\ 1 & ; i = j \end{cases}$$

أي إذا كانت مصفوفة f بالنسبة للأساس المعتبر مصفوفة واحدية. أو، أيضاً، إذا كانت عبارة f بالنسبة لهذا الأساس هي:

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i \eta_i^*$$

حيث $n = \dim(L)$.

من الواضح أن وجود أساس متعامد ومتجانس يتطلب أن يكون f غير منحل. وأن النتيجة 1 للنظرية 6 تبين أن هذا الشرط كاف أيضاً في الحالة

العمودية العقدية مثلاً (بصفة أعم في الحالة التي يكون فيها K مغلقاً جبرياً ومميزته تخالف 2، ويكون التضامن المختار على K هو التطبيق المطابق).

نعتبر الآن الحالة العمودية الحقيقية أو الحالة الهيرميتية العقدية. إذا قبل f أساساً متعامداً ومتجانساً فإن العلاقة التالية صحيحة مهما كان x في L:

$$f(x, x) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i \, \xi_i^* = \sum_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|^2$$

وبالتالي:

$$f(x, x) > 0 \qquad \forall\, x \neq 0$$

نقول عن الشكل f الذي يحقق المتراجحة السابقة (في الحالة العمودية الحقيقية أو الهيرميتية العقدية - نلاحظ أن $f(x, x)$ موجب دوماً عندئذ) أنه **معرف موجب**. بخصوص القضية العكسية إذا كان f معرفاً موجب فإن برهان النتيجة 2 يبين أن $p = n$، وبالتالي L يقبل أساساً متعامداً ومتجانساً. إذن:

نظرية 7 - ليكن L فضاء شعاعياً حقيقياً (عقدياً بالترتيب) بعده منته، وf شكلاً ثنائي الخطية متناظراً (شبه خطي هيرميتي بالترتيب) على L. لكي يقبل L أساساً متعامداً ومتجانساً بالنسبة لـf يجب ويكفي أن يكون f معرفاً موجب.

مثال 12 - إن الشكل $(x|y)$ الوارد في المثال 7 معرف موجب؛ كما نلاحظ أن كل أساس متعامد ومتجانس من أجل هذا الشكل هو جملة ثلاثة أشعة متعامدة، أطوالها تساوي 1؛ يدعى هذا الأساس أيضاً **جملة إحداثيات قائمة** (أو مستطيلة) في الفضاء المعتاد.

ملاحظة 7 - إذا كان (a_i) أساساً متعامداً متجانساً من أجل f، وإذا كان:

$$x = \sum \xi_i \; a_i \in L$$

فإن إحداثيات x معطاة بالعلاقة:

$$\xi_i = f(x, a_i)$$

لدينا بالفعل :

$$f(x, a_i) = \sum \xi_j f(a_j , a_i) = \xi_i f(a_i , a_i) = \xi_i$$

ملاحظة 8 - ليكن L فضاء شعاعياً حقيقياً (عقدياً بالترتيب) بعده n ، وليكن f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً (شبه خطي هيرميتي بالترتيب) على L ؛ يوجد إذن أساس لِـ L يجعل عبارة f بالنسبة إليه تكتب على النحو :

$$f(x, y) = \xi_1 \overline{\eta}_1 + ... + \xi_p \overline{\eta}_p - \xi_{p+1} \overline{\eta}_{p+1} - ... - \xi_{p+q} \overline{\eta}_{p+q}$$

حيث p وَ q عددان صحيحان يحققان $p, q \geq 0$ وَ $p + q \leq n$.

لكي يكون f معرفاً موجب يلزم ويكفي أن يكون $p = n$ وَ $q = 0$. أما الحالة الأخرى : $p = 0$ وَ $q = n$ فهي حالة الأشكال **المعرفة سالبة** ، أي أن :

$$f(x, x) < 0 \qquad \forall x \neq 0$$

بصفة أعم نقول عن f أنه **موجب** (سالب بالترتيب) إذا كان $f(x, x) \geq 0$ $(f(x, x) \leq 0$ بالترتيب) مهما كان x ؛ وهذا يعني بطبيعة الحال أن $q = 0$ $(p = 0$ بالترتيب) بحيث أن الأشكال المعرفة موجبة (المعرفة سالبة بالترتيب) هي بالضبط الأشكال الموجبة (السالبة بالترتيب) غير المنحلة .

إذا لم يكن شكل موجباً ولا سالباً ، نقول عنه أنه : **موسع** ، وهذا يعني إذن أن لدينا $p \geq 1$ وَ $q \geq 1$ ، أو أننا نستطيع إيجاد شعاعيين x وَ y بحيث :

$$f(x, x) > 0 \quad , \quad f(y, y) < 0$$

وهي حالة شكل لورانتز مثلاً .

7. التشاكلات الذاتية لشكل هيرميتي .

ليكن L فضاء شعاعياً على K وَ f شكلاً هيرميتياً غير منحل على L . نقول عن تشاكل ذاتي u للفضاء الشعاعي L إنه **تشاكل ذاتي لِـ** f إذا حقق :

$$f(u(x), u(y)) = f(x, y) \qquad \forall x, y \in L$$

لما كان لدينا :

$$f(u(x),\ u(y)) = f(x, u^*(u(y)))$$

حيث يرمز u^* لقرين u بالنسبة لـ f (الفقرة 3) ، فإننا نرى أن التشاكلات الذاتية لـ f ليست سوى التشاكلات الذاتية لـ f التي تحقق :

$$u^* \circ u = j_L$$

مع العلم أن j_L يمثل التطبيق المطابق في L . ومنه ومن العلاقات :

$$(j_L)^* = j_L,\ (v \circ u)^* = u^* \circ v^*,\ (u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$$

نستنتج مباشرة أن التشاكلات الذاتية لـ f تشكل زمرة جزئية من الزمرة $GL(L)$ التي تمثل التشاكلات الذاتية لـ L ؛ نرمز لهذه الزمرة الجزئية بـ :

$$GL(f)$$

ونسمي زمرة التشاكلات الذاتية لـ f .

سواء كان u تشاكلاً ذاتياً لـ f أو لا فإن التابع :

$$g(x, y) = f(u(x), u(y))$$

شكل هيرميتي على L . لكي نعبّر على أن u تشاكل ذاتي لـ f ، أي على أن $f = g$ ، يكفي أن نكتب بأن معاملات f و g بالنسبة لأساس معطى $(a_i)_{1 \le i \le n}$ لـ L ، متساوية (نفرض بطبيعة الحال أن بعد L منته) . وبالتالي فإن التشاكلات الذاتية لـ f تتميز بالعلاقة :

$$f(u(a_i), u(a_j)) = f(a_i, a_j)$$

مهما كان i و j بصفة خاصة . إذا وجد أساس لـ L متعامد ومتجانس بالنسبة لـ f ، فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون u تشاكلاً ذاتياً لـ f هو أن تحول u الأساس السالف الذكر إلى أساس آخر متعامد ومتجانس بالنسبة لـ f .

إذا كان تضامن K هو التطبيق المطابق، وأخذنا f مساوياً للشكل الثنائي الخطية :

$$f(x, y) = \sum \xi_i \eta_i$$

على K^n ، فإننا نرمز $GL(f)$ بـ :

$$O(n, K)$$

وتسمى الزمرة العمودية ذات n متغيراً على الحقل K ، وفي هذه الحالة إذا كانت A مصفوفة تشاكل ذاتي u لـ L ، فإن مصفوفة u^* ليست سوى المصفوفة المنقولة ^tA لـ A كما رأينا ذلك في الفقرة 3. إذن فإن $O(n, K)$ هي الزمرة الجزئية لـ $GL(n, K)$ المؤلفة من المصفوفات A المنتمية لـ $M_n(K)$ بحيث :

$$^tA \cdot A = 1_n$$

إذا كانت مصفوفة A تحقق هذا الشرط، نقول عنها إنها متعامدة (أو عمودية) . نشير إلى أن العلاقة السابقة تستلزم :

$$1 = \text{dét}\,(^tA)\,\text{dét}\,(A) = \text{dét}\,(A)^2$$

وبالتالي :

$$\text{dét}\,(A) = \pm 1$$

تشكل المصفوفات المتعامدة التي لها معينات تساوي 1 + زمرة جزئية من $O(n, K)$ ، نرمز لها بـ :

$$O^+(n, K) \text{ أو } SO(n, K)$$

وتسمى زمرة الدوران ذات n متغيراً على الحقل K .

إذا كان $K = \mathbf{R}$ ($K = \mathbf{C}$ بالترتيب) فإننا نتحدث عن الزمرة العمودية الحقيقية (العقدية بالترتيب) وعن زمرة الدوران الحقيقية (العقدية بالترتيب) .

في حالة حقل K وتضامن كيفيين وعندما نأخذ f مساوياً للشكل الهيرميتي :

$$f(x, y) = \sum_{1 \le i \le n} \xi_i \eta_i^*$$

على K^n ، فإننا نرمز للزمرة $GL(f)$ بـ :

$$\mathrm{U}(n, K)$$

وتسمى الزمرة الواحدية ذات n **متغيراً على الحقل** K بالنسبة للتضامن المعتبر على K ؛ فهي إذن زمرة المصفوفات A المنتمية لِـ $M_n(K)$ بحيث :

$$A^* A = 1_n$$

(نقول عن مثل هذه المصفوفة إنها **واحدية** بالنسبة للتضامن المعتبر) . بصفة خاصة ، ومن أجل $K = \mathbf{C}$ ، والتضامن $\lambda \to \bar{\lambda}$ ، نحصل على **الزمرة الواحدية العقدية ذات** n **متغيراً**؛ وهي مكونة من المصفوفات العقدية الواحدية أي تلك التي تحقق :

$$^t\bar{A} \cdot A = 1_n$$

مثال 13 - نأخذ L مساوياً للفضاء المعتاد وَ f هو الشكل $(x|y)$ الوارد في المثال 7؛ عندئذ نجد أن زمرة الدوران الموافقة لهذه الحالة مكوّنة من الدورانات (بالمفهوم المعتاد) حول المصدر أي : الإزاحات التي تترك 0 ساكنة

المثال 14 - زمرة لورانتز هي تعريفاً زمرة التشاكلات الذاتية لشكل لورانتز - وبصفة أدق ، هي الزمرة الجزئية من زمرة التشاكلات الذاتية لشكل لورانتز f، المؤلفة من هذه التشاكلات الذاتية التي معيناتها تساوي 1 + والتي تطبّق مجموعة الأشعة (x, y, z, t) من $\mathbf{R}^4$ بحيث $t > 0$ ، في نفسها . تلعب هذه الزمرة في ميدان الفيزياء دوراً أساساً .

8. التشاكلات الذاتية لشكل هيرميتي موجب :

الرجوع إلى الشكل القطري .

نبرهن فيما يلي على النتيجة التالية :

نظرية 8 – ليكن L فضاء شعاعياً عقدياً، بعده منته، وَ f شكلاً هيرميتياً معرفاً موجب على L، وَ u تشاكلاً ذاتياً لِـ f. توجد عندئذ أشعة ذاتية لِـ u تؤلف أساساً لِـ L متعامداً ومتجانساً بالنسبة لِـ f.

لنرمز بصفة عامة بِـ u^* لقرين تماثل داخلي u لِـ L بالنسبة لِـ f؛ إن التشاكلات الذاتية لِـ f مميزة بالعلاقة:

$$u^* = u^{-1}$$

وبالتالي فهي تتمتع بالخاصية:

$$u^* \circ u = u \circ u^*$$

إذا حقق تماثل داخلي u لِـ L هذه المساواة نقول عنه إنه **ناظمي** بالنسبة لِـ f. بعد هذا التقديم، نلاحظ أن النظرية 8 حالة خاصة من النظرية التالية:

نظرية 9 – ليكن L فضاء شعاعياً عقدياً بعده منته، و f شكلاً هيرميتياً معرفاً موجب على L، وَ u تماثلاً داخلياً لِـ L ناظمياً بالنسبة لِـ f. يوجد عندئذ أساس لِـ L متعامد ومتجانس بالنسبة لِـ f، مؤلف من أشعة ذاتية لِـ u.

يعتمد برهان هذه النظرية على عدة نتائج تمهيدية:

لازمة 1 – نفرض u ناظمياً، عندئذ مهما كان x في L، فإن العلاقة $u(x) = 0$ تستلزم $u^*(x) = 0$، أي أن: $\mathrm{Ker}\,(u) = \mathrm{Ker}\,(u^*)$.

نلاحظ في البداية أنه مهما كان x وَ y في L، فإن:

$$\begin{aligned} f\big(u(x), u(y)\big) &= f\big(u^* \circ u(x), y\big) = f\big(u \circ u^*(x), y\big) \\ &= f\big(u^*(x), u^*(y)\big) \end{aligned}$$

وبالتالي:

$$f\big(u(x), u(x)\big) = f\big(u^*(x), u^*(x)\big)$$

إذا كان $u(x) = 0$ فإن الطرف الأيمن منعدم حتماً، وهو ما يبين أن $u^*(x) = 0$ لأن f معرف موجب.

لازمة 2 - نفرض أن u ناظمي ، ولتكن λ قيمة ذاتية لـ u ، عندئذ تكون $\bar{\lambda}$ قيمة ذاتية لـ u^* وتصبح العلاقة $u(x) = \lambda x$ تكافئ العلاقة $u^*(x) = \bar{\lambda} x$ من أجل x في L .

نضع $v = u - \lambda \cdot I_L$ ، بما أن λ تبديلي مع كل تماثل داخلي لـ L ، فإن v ناظمي مثل u . وهي النتيجة التي نصل إليها بواسطة حساب بسيط ، ثم إن : $v^* = u^* - \bar{\lambda} \cdot I_L$ ولذا نحصل على اللازمة 2 بتطبيق اللازمة 1 على v .

نرمز فيما يلي بـ $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ لمختلف القيم الذاتية لـ u وبـ L_i $(1 \le i \le r)$ للفضاء الجزئي من L المؤلف من حلول $u(x) = \lambda_i x$.

لازمة 3 - نفرض u ناظمياً ، عندئذ تكون الفضاءات الجزئية الذاتية $L_1, \dots, L_r$ متعامدة مثنى مثنى من أجل f .

لرؤية ذلك نأخذ x في L_i و y في L_j ، لدينا حسب اللازمة 2 ،

$$\lambda_i \cdot f(x, y) = f\big(u(x), y\big) = f\big(x, u^*(y)\big) = f(x, \bar{\lambda}_j^* y)$$
$$= \lambda_j f(x, y)$$

وبما أن $\lambda_i \neq \lambda_j$ لما $j \neq i$ ، نرى في هذه الحالة أننا نجد $f(x, y) = 0$ ، ومنه تأتي اللازمة .

لازمة 4 - ليكن M فضاء جزئياً من L قاراً بواسطة u و u^* ، عندئذ يكون العمودي $M^\perp$ لـ M بالنسبة لـ f قاراً أيضاً بواسطة u و u^* .

يكفي أن نبين ، من أجل x في L ، أن العلاقة :

$$f(x, y) = 0 \qquad \forall\, y \in M$$

تستلزم :

$$f\big(u(x), y\big) = 0 \qquad \forall\, y \in M$$
$$f\big(u^*(x), y\big) = 0 \qquad \forall\, y \in M$$

لإثبات ذلك نلاحظ أن $f\big(u(x), y\big) = f\big(x, u^*(y)\big)$ وبما أن العلاقة $y \in M$ تستلزم فرضاً $u^*(y) \in M$ فإن $f\big(u(x), y\big) = 0$ مهما كان y في M . أما المساواة الثانية فتبين بنفس الطريقة .

لإنهاء برهان النظرية 5، نعتبر الفضاء الجزئي:

$$M = L_1 + \dots + L_r$$

من L المولد عن الأشعة الذاتية لـ u. إن M قار بواسطة u و u^* حسب اللازمة 2، وعليه فالأمر كذلك فيما يخص $M^\perp$؛ لو كان $M^\perp \neq 0$ لكان للتماثل الداخلي u شعاع ذاتي في $M^\perp$ على الأقل، ويصبح لدينا في هذه الحالة:

$$M \cap M^\perp \neq 0$$

وهو يخالف القول بأن f معرف موجب؛ إذن $M^\perp = \{0\}$، ولما كان L مجموعاً مباشراً لـ M ولـ $M^\perp$ (نتيجة النظرية 5) يأتي:

$$L = M$$

وبالتالي فإن L مجموع للفضاءات الجزئية L_i، وهو، زيادة على ذلك، مجموع مباشر حسب النظرية 4 من ف 34.

بعد هذا، وحسب اللازمة 3، لإنشاء أساس متعامد ومتجانس لـ L مؤلف من أشعة ذاتية لـ u، يكفي أن نختار في كل L_i أساساً متعامداً ومتجانساً من أجل إقتصار f على L_i، وهذا ممكن (النظرية 7) ذلك أن اقتصار شكل معرف موجب على فضاء جزئي هو أيضاً معرف موجب. بذلك ينتهي برهان النظريتين 8 و 9.

إذا كان u تشاكلاً ذاتياً لـ f، فإن اللازمة 2 تبين أن $u(x) = \lambda x$ تستلزم:

$$u^{-1}(x) = \bar{\lambda} x$$

ومنه نستنتج أن كل قيمة ذاتية λ لـ u تحقق:

$$\lambda^{-1} = \bar{\lambda}$$

أي أنها عدد عقدي مقياسه يساوي 1.

هناك حالة خاصة وهامة أخرى وهي حالة تماثل داخلي u قرين ذاته من أجل f، أي أن:

$$u^* = u$$

تبين اللازمة 2 في هذه الحالة أن:

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

أي أن كل قيمة ذاتية لـ u حقيقية حتماً.

نستطيع بطبيعة الحال كتابة النتائج السابقة بلغة المصفوفات. لهذا الغرض نأخذ $E = C^n$ و:

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i \bar{\eta}_i$$

إن ذلك لا ينال من عمومية النتائج حسب النظرية 7. لتكن A مصفوفة u بالنسبة للأساس القانوني. ولتكن U مصفوفة الانتقال من الأساس القانوني إلى الأساس المتعامد والمتجانس المكون من أشعة ذاتية لـ u، عندئذ تصبح مصفوفة u بالنسبة للأساس الأخير هي $U^{-1} A U$ (راجع نتيجة النظرية 12)، بحيث أن:

$$A = U D U^{-1}$$

حيث D مصفوفة قطرية. لكن لما كانت U تحوّل من الأساس القانوني (المتعامد والمتجانس بالنسبة للشكل المعتبر) إلى أساس متعامد ومتجانس آخر، فإن المصفوفة U واحدية كما سبق أن رأينا في الفقرة 7. إذن:

نتيجة للنظرية 9 - لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة n معاملاتها عقدية، بحيث

$$A^* A = A A^*$$

توجد عندئذ مصفوفة واحدية عقدية U من الرتبة n ومصفوفة قطرية D من الرتبة n بحيث يكون لدينا:

$$A = U D U^{-1}$$

لكي تكون A واحدية (هرميتية بالترتيب) يجب ويكفي أن تكون الحدود القطرية لـ D ذات مقياس يساوي 1 (حقيقية بالترتيب).

فيما يخص الجزء الأخير من هذه النتيجة، نلاحظ أن من $A = U D U^{-1}$ يأتي:

$$A^* = (U^{-1})^* D^* U^* = U D^* U^{-1} = U D U^{-1}$$

حيث يرمز $\bar{D}$ للمصفوفة المرافقة لـ D، حتى يكون A هرميتياً يجب ويكفي إذن أن تتحقق المساواة :

$$U D U^{-1} = U \bar{D} U^{-1}$$

أي أن $D = \bar{D}$ أو أن D حقيقي، ولكي يكون A واحدياً يلزم ويكفي أن تتحقق العلاقة :

$$I_n = A^* A = U \bar{D} U^{-1} U D U^{-1} = U \bar{D} D U^{-1}$$

أي أن $\bar{D} D = I_n$، وهذا يعني بطبيعة الحال أن حدود قطرية D ذات قيم مطلقة تساوي 1.

نقول عن مصفوفة A من $M_n(C)$ بحيث $A^* A = A A^*$ إنها ناظمية؛ إن هذه المصفوفات مصفوفات قابلة للتقطير (أي للكتابة على شكل مصفوفات قطرية).

تبيّن النتيجة السابقة بوضوح أن القيم الذاتية لمصفوفة هرميتية (وكذلك، إذن، لمصفوفة تناظرية حقيقية) قيم حقيقية. من هذه النتيجة نستخلص ما يلي :

نظرية 10 – ليكن L فضاءً شعاعياً حقيقياً بعده منته و f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً ومعرفاً موجباً على L، وليكن u مؤثراً ذاتياً لـ L قرين ذاته من أجل f. عندئذ يوجد أساس لـ L متعامد ومتجانس من أجل f يتألف من أشعة ذاتية لـ u.

نتبع خطوات برهان النظرية 9؛ إن اللازمتين 1 و 2 تبقيان صحيحتين لأن $u = u^*$. أما اللازمتان 3 و 4 فهما صحيحتان ويتم إثبات ذلك بنفس الطريقة. لنشكل كما ورد أعلاه الفضاء الجزئي M من L المولد عن الأشعة الذاتية لـ u. حينئذ يرجع الأمر إلى إثبات المساواة $M = L$، أي (النتيجة 5) أن $M^{\perp} = 0$. وهذا يعود، كما ورد أعلاه، إلى البرهان على أن كل فضاء جزئي N من L قار بواسطة u وغير منعدم، يحتوي بالضرورة على شعاع ذاتي لـ u على الأقل. نعوض f باقتصاره على N (وهذا الاقتصار متناظر ومعرف موجب) و u باقتصاره على N (وهذا الاقتصار قرين

ذاته بالنسبة لاقتصار f على N) يعود الأمر بنا إلى البرهان على أن u يقبل على الأقل شعاعاً ذاتياً في L، في حالة تحقق فروض النظرية، أي أن u يقبل على الأقل قيمة ذاتية حقيقية.

من أجل ذلك نعتبر أساساً (a_i) لـ L متعامداً ومتجانساً من أجل f (النظرية 7)؛ إن المصفوفة A لـ u بالنسبة لهذا الأساس متناظرة وحقيقية كما تبين ذلك حسابات الفقرة 3، ولذا فإن القيم الذاتية لهذه المصفوفة حقيقية (نتيجة للنظرية 9). بما أن القيم الذاتية لـ u هي أيضاً القيم الذاتية لـ A، فإن البرهان قد انتهى.

نتيجة - لتكن A مصفوفة تناظرية حقيقة؛ توجد مصفوفة متعامدة حقيقية U ومصفوفة قطرية حقيقية D بحيث:

$$A = U D U^{-1}$$

لرؤية ذلك يكفي أن نعتبر على $\mathbf{R}^n$ الشكل الثنائي الخطية:

$$f(x, y) = \sum_{1 \le i \le n} \xi_i \eta_i$$

والتماثل الداخلي u الذي يقبل A كمصفوفة له بالنسبة للأساس القانوني؛ إن u قرين ذاته من أجل f. ولذا يمكن أخذ U مساوية لمصفوفة الإنتقال من الأساس القانوني إلى أساس لـ $\mathbf{R}^n$ متعامد ومتجانس بالنسبة لـ f مكون من أشعة ذاتية لـ u.

ملاحظة 9 - نجد في المؤلفات القديمة المخصصة لفرع «الرياضيات الخاصة (كذا)» أن البرهان على كون القيم الذاتية لمصفوفة حقيقية A من الرتبة $n = 3$، حقيقية كلها، يتم في معظم الأحيان بالإشارة إلى أن هذه القيم الذاتية جذور لمعادلة جبرية، معاملاتها حقيقية، ودرجتها 3، وأن هذه المعادلة (وبصفة عامة، كل معادلة جبرية درجتها فردية على $\mathbf{R}$) تقبل دوماً جذراً حقيقياً على الأقل.

إن العيب الرئيسي في هذا البرهان هو أننا لا نستطيع تعميمه ليشمل المصفوفات المتناظرة الحقيقية من الرتبة 4 (بل لا نستطيع تعميمه حتى

ليشمل حالة الرتبة 2 ...) لأن المعادلات الجبرية ذات الرتب الزوجية لاتقبل دوماً جذوراً حقيقية.

نقدم فيما يلي برهانا أولياً جداً على النتيجة العامة. لتكن (a_{ij}) مصفوفة تناظرية حقيقية (أو حتى، هيرميتية عقدية) ولتكن λ في C قيمة ذاتية لهذه المصفوفة، عندئذ تقبل جملة المعادلات الخطية المتجانسة:

$$\sum_{j} a_{ij}\,\xi_j = \lambda\,\xi_i$$

حلاً غير تافه في C، ومن أجل هذا الحل لدينا:

$$\sum_{i,j} a_{ij}\,\xi_j\,\bar{\xi}_i = \lambda \sum_{i} \xi_i\,\bar{\xi}_i$$

نلاحظ أن الطرف الأيسر حقيقياً لأن (a_{ij}) هيرميتية ومن جهة أخرى فإن العبارة:

$$\sum \xi_i\,\bar{\xi}_i = \sum |\xi_i|^2$$

حقيقية وهي أكبر من الصفر تماماً لأن العناصر ξ_i ليست كلها معدومة؛ وعليه نستنتج أن القيمة الذاتية λ حقيقية حتماً.

أما البرهان «الهندسي» المقابل للبرهان السابق فيتمثل في كتابة:

$$\begin{aligned}\lambda \cdot f(x,x) &= f(\lambda x, x) = f\big(u(x), x\big) = f\big(x, u(x)\big)\\ &= f(x, \lambda x) = \bar{\lambda} \cdot f(x,x)\end{aligned}$$

وذلك باستعمال رموز النظرية 9، ثم نلاحظ أن $f(x,x) \neq 0$ لأن f معرف موجب؛ ومنه يأتي أن:

$$\lambda = \bar{\lambda}$$

9. الأشعة المتساوية الإتجاه والأشكال الموسعة:

في الحالة العمودية الحقيقية أو الهيرميتية العقدية، نقول عن شكل هيرميتي f على فضاء شعاعي L إنه معرف إذا كان معرفاً موجب أو معرفاً

سالب، أي إذا احتفظت العبارة $f(x, x)$، مهما كان x في L، بإشارة ثابتة، ولا تنعدم إلا عند $x = 0$.

من الواضح أن الأشكال المعرفة لا تقبل أي شعاع متساوي الاتجاه غير منعدم. والواقع أن هذه الخاصية تميز الأشكال المعرفة، أي أن الشرط اللازم والكافي لكي يكون f معرفاً هو أن تؤدي العلاقة $f(x, x) = 0$ إلى $x = 0$.

يرجع هذا الأمر إلى البرهان على أن الأشكال غير المعرفة (وهذا لا يعني أنه موسع...) تقبل أشعة متساوية الاتجاه غير منعدمة. لكن لما كان f غير معرف فإنه يوجد شعاعان a و b في L بحيث:

$$f(a, a) \geq 0 \quad ; \quad f(b, b) \leq 0$$

وبما أن ليس هناك ما يستدعي برهاناً عندما يكون كل من a و b متساوي الاتجاه فإننا نستطيع فرض:

$$f(a, a) > 0 \quad ; \quad f(b, b) < 0$$

سنبين فيما يلي أنه يوجد عدد سلمي λ بحيث يكون $x = a\lambda + b$ متساوي الاتجاه وغير منعدم.

نلاحظ أن النقطة الأخيرة واضحة لأن لو كان $b + \lambda a = 0$ لكانت إشارة:

$$f(b, b) = f(-\lambda a, -\lambda a) = |\lambda|^2 f(a, a)$$

هي إشارة $f(a, a)$ وهذا يناقض الفرض. إذن علينا إثبات وجود عدد λ بحيث:

$$0 = f(a\lambda + b, a\lambda + b) = f(a\lambda, a\lambda) + f(a\lambda, b) + f(b, a\lambda) + f(b, b)$$
$$= \lambda \bar{\lambda} u + v \lambda + \bar{v} \bar{\lambda} + w$$

حيث وضعنا:

$$u = f(a, a) \quad , \quad v = f(a, b) \quad , \quad w = f(b, b)$$

لكن من الواضح (راجع كتابة ثلاثي حدود من الدرجة الثانية على شكل مجموع مربعات) أن لدينا:

$$u\bar{\lambda}\lambda + v\bar{\lambda} + \bar{v}\lambda + w = u\left[\left(\bar{\lambda} + \frac{v}{u}\right)\left(\lambda + \frac{\bar{v}}{u}\right) - \frac{v\bar{v} - uw}{u^2}\right]$$

$$= u\left[\left|\lambda + \frac{\bar{v}}{u}\right|^2 - \frac{|v|^2 - uw}{u^2}\right]$$

لكي تقبل هذه المعادلة لـ λ حلاً في حقل الأساس K (الذي هو $\mathbf{R}$ في الحالة العمودية الحقيقية، و $\mathbf{C}$ في الحالة العمودية العقدية) يجب ويكفي أن تحقق المتراجحة :

$$|v|^2 - uw \geq 0$$

لما كان $u = f(a, a)$ موجباً و $w = f(b, b)$ سالباً، فإن هذا الشرط محقق، وبذلك نأتي على نهاية برهاننا.

ملاحظة 10 - نستطيع في البرهان السابق تعويض L بالفضاء الجزئي المولد عن a و b وتطبيق النتيجة 2 أو النتيجة 3 للنظرية 6 (باعتماد رموز هاتين النتيجتين)، يتضح أنه توجد أشعة متساوية الاتجاه غير منعدمة ما عدا في الحالتين $p = n$ ، $q = 0$ و $p = 0$ ، $q = n$ اللذين يميزان الأشكال المعرفة).

10. متراجحة كوشي - شوارتز

نختم هذا الفصل بنتيجة جد مفيدة في التحليل وذلك على الرغم من بساطتها :

نظرية 11 - ليكن L فضاء شعاعياً حقيقياً (عقدياً بالترتيب) و f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً (شبه خطي هيرميتي، بالترتيب) على L. نفرض :

$$f(x, x) \geq 0 \qquad \forall\, x \in L$$

لدينا عندئذ :

$$|f(x, y)|^2 \leq f(x, x)\, f(y, y)$$

مهما كان x و y في L.

لرؤية ذلك نلاحظ أنه مهما كان العدد السلمي λ فإننا نجد العبارة :

$$f(x\lambda + y, x\lambda + y) = u\,\lambda\,\bar{\lambda} + v\lambda + \bar{v}\,\bar{\lambda} + w \qquad (21)$$

حيث :

$$u = f(x, x), \quad v = f(x\, y), \quad w = f(y, y)$$

موجبة، ومنه وبما أن u و v موجبتان فيجب أن نستخلص :

$$|v|^2 - uw \leq 0$$

إذا كان $u = 0$، فمن الواضح أن العبارة (21) لا يمكن أن تكون موجبة إلا إذا كان $v = 0$ (ذلك أنه إذا كان $v \neq 0$ فإننا نستطيع إختيار λ بطريقة تجعل $v\lambda$ عدداً سلمياً كيفياً) وبالتالي فالمتراجحة السابقة بديهية في حالة $u = 0$.

إذا كان $u \neq 0$، نستطيع مثلاً التعبير على أن (21) موجبة من أجل :

$$\lambda = -\bar{v}/u$$

وعندها تكون قيمة (21) من هذا الإختيار لـ λ هي :

$$-\frac{|v|^2 - uw}{u}$$

وبما أن $u > 0$ فإن إيجابية هذه القيمة تؤدي إلى المتراجحة المطلوب إثباتها.

نتيجة 1 - نفرض $f(x, x) \geq 0$ مهما كان x. لكي يكون f غير منحل يلزم ويكفي أن يكون f معرفاً موجباً.

بالإعتماد على النظرية 11 نرى أن العلاقة $f(x, x) = 0$ تستلزم $f(x, y) = 0$ مهما كان y في L. إذن $x = 0$ إذا كان f غير منحل.

مثال 13 - نأخذ $L = \mathbb{C}^n$ و

$$f(x, y) = \sum_{1 \leq i \leq n} \xi_i\, \bar{\eta}_i$$

فنجد العلاقة :

$$|\xi_1 \eta_1 + \dots + \xi_n \eta_n| \leq \sqrt{|\xi_1|^2 + \dots + |\xi_n|^2} \cdot \sqrt{|\eta_1|^2 + \dots + |\eta_n|^2}$$

المحققة مهما كانت الأعداد العقدية ξ_i ، η_i .

مثال 14 - نأخذ الشكل :

$$f(x, y) = \int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t$$

الوارد في المثال 9، نجد عندئذ المتراجحة :

$$\int_0^1 x(t)\,\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t \le \sqrt{\int_0^1 |x(t)|^2\,\mathrm{d}t} \cdot \sqrt{\int_0^1 |y(t)|^2\,\mathrm{d}t}$$

التي نستعملها بكثرة في التحليل .

ملاحظة 11 - في حالة الجداء السلمي $(x|y)$ المعرف في الفضاء المعتاد، نلاحظ أن النظرية 11 تعني أن القيمة المطلقة للجداء السلمي لـ x وَ y أصغر من جداء طولي x وَ y أو تساويه، أما التفسير الهندسي لهذه النتيجة فبديهي : حيث أن $(x|y)$ يساوي جداء طولي x وَ y وجيب تمام زاوية x وَ y ؛ مع العلم أن القيمة المطلقة لجيب تمام زاوية ما أصغر من 1 أو تساويه .

نتيجة 2 - نفرض $f(x, x) \geq 0$ مهما كان x ، ونضع :

$$\|x\| = \sqrt{f(x, x)}$$

عندئذ يكون :

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

مهما كان x وَ y في L .

لدينا بالفعل :

$$\begin{aligned} \|x - y\|^2 = f(x + y, x + y) &= f(x, x) + f(x, y) + \overline{f(x, y)} + f(y, y) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\,Re\big(f(x, y)\big) \end{aligned}$$

وبما أن متراجحة كوشي - شوارتز تكتب أيضاً على النحو :

$$|f(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

يأتي :

$$Re(f(x, y)) \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

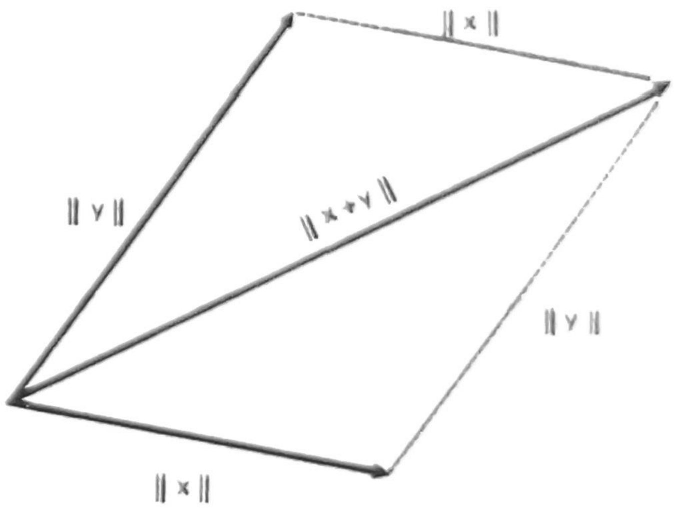
وبالتالي :

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \cdot \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

وهو ما يؤدي مباشرة إلى النتيجة المطلوبة .

في حالة الجداء السلمي المعتاد $(x|y)$، من الواضح أن $\|x\|$ يساوي الشعاع x . وعليه فإن النتيجة 2 تثبت ما يلي :

نتيجة 3 - إن طول كل ضلع من أضلاع مثلث، أصغر من مجموع طولي الضلعين المتبقيين .



تمارين

إنه لمن الوهم أن نرجو تعلم الرياضيات، أولية كانت أم عالية، بدون حل تمارين.

وتنقسم التمارين الواردة في هذا الكتاب إلى ثلاثة أنواع. فالبعض منها هو مجرّد توضيحات عملية أو حتى عددية للنظريات المشروحة في النص، ولا يمكن للقارئ المبتدئ أن يكسب تقنية الحساب بدون حل جزء معتبر من هذا النوع من التمارين. وتقدم بعض التمارين الأخرى تتمات نظرية إلى النص، وبدراستها يتعود القارئ على إستخدام لغة الإستدلالات المستعملة في النص وأساليبها. تعني العلامة م قبل النص أن التمرين ليس صعب جداً. أما النوع الأخير من التمارين فيتكون من تلك التي تقدم إلى النص تتمات مهمة وصعبة وهي مخصصة للطلاب المتقدمين والذين يهتمون حقاً بالرياضيات وتسبق هذه التمارين لعلامة م م أو حتى بالعلامة م م م.

وأخيراً لا يسعنا إلا أن نؤكد بإلحاح أن حل تمرين ما لا يقتصر على «مسودّة» كتبت بسرعة وتقنعنا بأنا فهمنا الحل تقريباً، وإذا قبلت هذه الطريقة بالنسبة لتمارين الحساب العددي فإنه من الواجب، بالنسبة للتمارين النظرية، أن نحرّرها تحريراً كاملاً حتى نستطيع إنشاء براهين حقيقية. وهذه هي الطريقة الوحيدة التي تسمح للطالب بأن يكسب لغة واضحة وصحيحة وأن يتوصل إلى إستعمال العبارات التقنية في محلها وبمعناها الدقيق. وهذا هو أحسن دليل على فهم موضوع ما بالرياضيات.

1. لتكن R و S علاقتين. إذا كانت R كاذبة، أثبت أن العلاقة $(R \Rightarrow S)$ صادقة. أيمكن أن نستنتج من هذا أن S صادقة؟

2. لتكن R و S علاقتين. بين أن العلاقة $(R \wedge \bar{R}) \Rightarrow S$ صادقة (يرمز $\wedge$ لـ «و» المنطقي، $\bar{R}$ يشير إلى نفي العلاقة R)

3. بين باعتبار مثال أن العلاقة:

$$(\forall x)(\exists y) R \Rightarrow (\exists y)(\forall x) R$$

ليست صادقة عموماً.

4. لتكن R و S علاقتين متكافئتين، و T علاقة ما. بين أن كلاً من العلاقات التالية صادقة:

$$\bar{R} \Leftrightarrow \bar{S}$$

$$(R \Rightarrow T) \Leftrightarrow (S \Rightarrow T)$$

$$(T \Rightarrow R) \Leftrightarrow (T \Rightarrow S)$$

$$(R \wedge T) \Leftrightarrow (S \wedge T)$$

$$(R \vee T) \Leftrightarrow (S \vee T)$$

(يرمز $\vee$ لـ «أو» المنطقي)

5. إثبت العلاقات التالية، حيث تشير R ، S ، T إلى علاقات ما:

$$R \Rightarrow (S \Rightarrow R)$$

$$(R \Rightarrow S) \Rightarrow [(S \Rightarrow T) \Rightarrow (R \Rightarrow T)]$$

$$R \Rightarrow [\bar{R} \Rightarrow S]$$

$$(R \vee S) \Leftrightarrow [(R \Rightarrow S) \Rightarrow S]$$

$$(R \Leftrightarrow S) \Leftrightarrow \{(R \wedge S) \vee [\bar{R} \wedge \bar{S}]\}$$

$$\overline{(R \Leftrightarrow S)} \Leftrightarrow (\bar{R} \Leftrightarrow S)$$

$$\{R \Rightarrow [S \vee \bar{T}]\} \Leftrightarrow [(T \wedge R) \Rightarrow S]$$

$$[R \Rightarrow (S \vee T)] \Leftrightarrow [S \vee (R \Rightarrow T)]$$

$$(R \Rightarrow S) \Rightarrow \{(R \Rightarrow T) \Rightarrow [R \Rightarrow (S \wedge T)]\}$$

$$(R \Rightarrow T) \Rightarrow \{(S \Rightarrow T) \Rightarrow [(R \vee S) \Rightarrow T]\}$$

$$(R \Rightarrow S) \Rightarrow [(R \wedge T) \Rightarrow (S \wedge T)]$$

$$(R \Rightarrow S) \Rightarrow [(R \Rightarrow T) \Rightarrow (S \vee T)]$$

م6. لتكن R و S علاقتين و x حرفاً غير وارد في R . إثبت أن العلاقتين :

$$(\forall x)(R \vee S) \Leftrightarrow (R \vee (\forall x)S)$$

$$(\exists x)(R \wedge S) \Leftrightarrow (R \wedge (\exists x)S)$$

صادقتان .

7. لتكن R و S علاقتين و x حرفاً . إثبت العلاقتين :

$$[(\forall x)(R \vee S)] \Rightarrow [(\forall x) R \vee (\exists x) S]$$

$$[(\exists x) R \wedge (\exists x) S] \Rightarrow [(\exists x)(R \wedge S)]$$

8. يتهيأ أفراد قبيلة آكلة اللحم البشري لأكل مبشر ، ورغبة منهم في أن يثبتوا له مرة أخيرة . إحترامهم للكرامة والحرية الإنسانيتين ، إقترح آكلو اللحم على المبشر أن يقرر مصيره بنفسه وذلك بتقديم تصريح وجيز : إذا كان هذا التصريح صادقاً . يشوى المبشر وإلا فيسلق . ماذا يجب أن يقول المبشر لينقذ حياته؟ (عن سرفنتاس) .

9. وصف العقيد X الأستاذ Y بأنه سفاح . وبعد إسبوعين تعرض العقيد لمحاولة قتل مدبرة من طرف الأستاذ . هل كان العقيد على حق؟

10. صغ قضايا تكافئ نفي القضايا التالية(*) .

(*) إن أبسط طريقة (بطبيعة الحال) لكتابة نفي علاقة هي أن نسبق هذه العلاقة بـ «لا» وهذا دون شك ليس المطلوب من القارئ في هذا التمرين . . .

أ) يحتوي كل مثلث قائم على زاوية قائمة

ب) في جميع السجون يحقد جميع المساجين على جميع الحرّاس

ج) يوجد من أجل كل عدد صحيح x عدد صحيح y بحيث مهما كان العدد الصحيح z تستلزم العلاقة $z < y$ العلاقة $z < x + 1$.

11. إفحص العلاقات المنطقية الكائنة بين القضايا التالية :

أ) كل الرجال فانون

ب) كل الرجال خالدون

ج) كل رجل خالد

د) كل رجل غير خالد

هـ) يوجد رجال خالدون

و) يوجد رجال فانون

12. بين مستخدماً عملية هيلبرت أنه إذا كانت R علاقة و x حرفاً واردا في R ، فالحرف x غير «وارد» في العلاقتين $(\forall x)R$ و $(\exists x)R$ ، وهذا رغم التأشيرين المستعملين للدلالة على هاتين العلاقتين .

تبين هذه النتيجة البسيطة أن الحرف x في التأشير $(\forall x)R$ لا يرد إلا ليدل على إجراء عملية على العلاقة R ، وإحدى نتائج هذه العملية هي حذف x من العلاقة R . تعرف ظاهرة مماثلة في التأشير التقليدي .

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$$

حيث لا يلعب الحرف x أي دور ولا يرد بصفة خاصة في النتيجة النهائية . يشرح أيضاً هذا التمرين لماذا يمكن في العلاقة $(\forall x)R$ ، إذا أردنا ذلك ، أن نستبدل الحرف x بأي حرف آخر غير وارد في R ؛ وعلى سبيل المثال ، فليست العلاقتان :

$$(\forall x)(x \times y = x - z) \quad \text{و} \quad (\forall t)(t \times y = t - z)$$

متكافئتين فحسب بل هما متطابقتين في حين يوجد فرق بين العلاقتين :

$$(\forall x)(x \times y = x - z) \quad \text{و} \quad (\forall y)(y \times y = y - z)$$

م 13. يوجد في كوكب المريخ بصفة إجمالية إتجاهان سياسيان : اليمين واليسار وينقسم من جهة أخرى طلاب المريخ إلى رابطتين : الإتحاد الكوكبي لطلاب المريخ والفيدرالية الكوكبية لطلاب المريخ. علماً بأن طلاب اليسار ينخرطون في الإتحاد الكوكبي لطلاب المريخ. برهن أن الفيدرالية الكوكبية لطلاب المريخ غير سياسية.

14. لنفرض أن الأعداد الصحيحة الأربعة m، n، p، q تحقق ما يلي :

أ) الأعداد m ، p ، q أولية فيما بينها

ب) باقي قسمة m على pq يساوي 12

جـ) باقي قسمة $2n + 3$ على n يساوي 3

د) لا توجد أية ثنائية عددين صحيحين x و y بحيث تكون العلاقة

$$x^4 + y^5 = p^3 - q^2 + m^6$$

محققة. برهن أن n زوجي.

15. نعتبر النصين التاليين :

أ) «بالإتفاق الكامل مع السيد روبير لاكوست، الوزير المقيم بالجزائر. نحن نمنح مسؤلية إعادة السلام والأمن في مدينة الجزائر، إلى لواء المظليين العاشر. ستكسب هذه الوحدة في ثلاثة أشهر معركة مدينة الجزائر دون أن تطلق النار على المباني بالرشاشات الثقيلة وبدون أن ترش طائرة واحدة فرنسية القصبة بالرصاص» (مقطع من تصريح الجنرال سلان في محاكمته).

ب) «وكانت النتيجة أن «معركة مدينة الجزائر» أصبحت بالنسبة للواء المظليين الذي يخوض المعركة، ولفرنسا نفسها، إنتصاراً باهظ الثمن : يقدر أن نسبة تتراوح بين 30 و 40 بالمائة من الشاغلين من رجال القصبة، الذي يبلغ عدد سكانها 80 000 نسمة، قد ألقي القبض عليهم في مرحلة أو في أخرى من «المعركة» بهدف الإستنطاق وهذا الإستنطاق

كان يورط في الإلتجاء إلى التعذيب كوسيلة موفرة للوقت للوصول إلى نتائج سريعة» (عن إدورد بهر، مراسل «التايم» بمدينة الجزائر، في «المشكلة الجزائرية»، و.و. نورتن، نيويورك 1961).

هل هذان النصان غير منسجمين منطقياً؟

(لا يطلب تقرير صدقهما أو كذبهما).

16. إختصر مستخدماً القاعدة $A \Leftrightarrow (\bar{\bar{A}})$ الجملة التالية (مستخرجة من تقرير مباراة لكرة القدم):

«...لا يعثر ولو على رياضي واحد ينكر أن العكس لم يكن غير مستحق».

نفس السؤال بالنسبة للنص التالي:

«ومرّة أخرى أبعث لكم إعلاناً حول الإمتحانات. لقد أبيت إلا أن أذكر ببعض المبادئ الأساسية. وألمّح إلى بعض «القرارات» أو بعض التصرفات التي هي قليلة العدد لحسن الحظ. ولكن، على الرغم من أنها ما زالت قليلة العدد فإنها لو تأكدت بصورة شرعية لما يمنع بعض الناس إلا أن ينفوا كل قيمة لكيفية العمل التي يحاول أكثر المدرسين تقديمها».

17. على أثر تمثيل لـ «بالياس وماليزند» تردد صحفي في إختيار أحد التعليقين التاليين:

أ) لم يسبق لدور ماليزند أن يُغنّي بهذا الجمال

ب) لم يسبق لأية مُغنية بهذا الشباب، ذات شعر على هذا الجمال أن تغنى ماليزند بهذا الجمال.

أي المدحين أقوى؟ (اكتب علنياً (لا أ) و (لا ب)).

م م 1. إن التعريف الرياضي الكامل للمجموعة، الخالية والذي يستعمل عملية هيلبرت هو :

$$\tau_x[(\forall x)(x \notin X)]$$

إستنتج تعريف Φ بلغة شكلية (بمعنى اكتب Φ على شكل تركيب لا يحتوي إلا على الإشارات الأساسية، بدون إستعمال أي موجز إصطلاحي)

م م 2. أنشئ برهاناً كاملاً منطقياً للنظرية 5 (انظر الملاحظة 6) .

3. اكتب جميع عناصر المجموعة

$$\mathcal{P}\Big(\mathcal{P}\big(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\Phi))\big)\Big)$$

4. لتكن X و Y مجموعتين. بيِّن أن العلاقتين $X \subset Y$ و $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{P}(Y)$ متكافئتان .

م 5. بين أنه لا توجد مجموعة X بحيث تكون العلاقة :

$$\mathcal{P}(X) \subset X$$

صادقة .

6. لتكن X مجموعة الأعداد x بحيث $0 \leq x < 1/100\,000\,000$ ، و Y مجموعة الأعداد y بحيث $0 \leq y \leq 100\,000\,000$ ؛ إثبت أن $X \subset Y$.

1. لتكن I مجموعة الأعداد الحقيقية θ بحيث $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و G مجموعة الدورانات حول نقطة 0 من المستوى. نعتبر التطبيق f لِـ I في G الذي يرفق كل عدد θ من I بالدوران ذي الزاوية θ حول 0. هل التطبيق f غامر؟ متباين؟ تقابل؟ ماذا يحدث لو كانت I مجموعة الأعداد الحقيقية θ بحيث $0 < \theta \leq 2\pi$؟

2. لتكن X و Y مجموعتين؛ حتى يكون الجزء G من $X \times Y$ بياناً لتطبيق ما لِـ X في Y يلزم ويكفي أن يكون التطبيق pr_1 لِـ G في X، تقابلاً.

3. ليكن $f: X \to Y$ و $g: Y \to Z$ تطبيقين و $h = g \circ f$ التطبيق المركب. أ) إذا كان h متبايناً، يكون f متبايناً؛ وبالإضافة إلى ذلك إذا كان f غامراً، يكون g متبايناً. ب) إذا كان h غامراً، يكون g غامراً؛ وإذا كان أيضاً g متبايناً، يكون f غامراً.

4. نعتبر المجموعات X، Y، Z والتطبيقات:

$$f: X \to Y \quad , \quad g: Y \to Z \quad , \quad h: Z \to X$$

ونشكل التطبيقات المركبة:

$$h \circ g \circ f \quad , \quad g \circ f \circ h \quad , \quad f \circ h \circ g$$

ثم نفرض أن إثنين منها متباينان والثالث غامر وإما إثنين منها غامران والثالث متباين. برهن عندئذٍ أن f، g، h تقابلات.

5. لتكن X ، Y ، Z ثلاث مجموعات ، ولتكن E مجموعة جميع التطبيقات لـ $X \times Y$ في Z و F مجموعة جميع التطبيقات لـ X في المجموعة :

$$Z^Y$$

المكونة من جميع التطبيقات لـ Y في Z . شيد تقابلاً بين E و F .

م 6. نسمي «إتصالاً بين مجموعتين X و Y» كل ثلاثية

$$f = (G, X, Y) \quad \text{مع} \quad G \subset X \times Y \text{ ؛}$$

يعمم هذا المفهوم إذن مفهوم التطبيق لـ X في Y [ولأسباب تظهر أسفله . تسمى أيضاً الإتصالات بين X و Y ، «بتوابع متعددة الأشكال (القيم) غير معرفة حيثما كان» غير أن لهذا الإصطلاح - الذي كان مستعملاً إلى أجلٍ قريب جداً - عيباً كبيراً ، وذلك أنه يجعلنا نظن أن مفهوم الإتصال حالة خاصة من مفهوم التابع رغم أن الصواب هو العكس] . تدعى المجموعة G ببيان f .نقول إن f معرف في العنصر x من X إذا كان $x \in pr_1(G)$ ؛ فيوجد حينئذٍ على الأقل عنصر $y \in Y$ بحيث $(x, y) \in G$. فنقول أن x و y في «إتصال وفق f» (يمكن طبعاً ألا يكون f معرفاً من أجل جميع العناصر $x \in X$ ، إذا كان f معرفاً في x ، يمكن أن توجد عدة عناصر $y \in Y$ في إتصال مع x وفق f ؛ فهذان السببان هما اللذان يشرحان الإصطلاح «تابع متعدد الأشكال غير معرف حيثما كان») .

أ) ادرس (من أجل $\mathbf{R} = X = Y$ مجموعة الأعداد الحقيقية) الإتصالات ذات البيانات المعرفة بالمعادلات التالية :

$$xy = 1 ; axy + bx + cy + d = 0 \quad ; \quad x^2 + y^2 = 1 \quad ; \quad x = \sin y$$

(حيث a ، b ، c ، d ثوابت حقيقية معطاة) . في كل حالة يطلب تعيين قيم x حيث يكون الإتصال معرفاً وتعيين قيم y التي هي في إتصال مع كل x .

ب) لتكن Γ و Γ' دائرتين مختلفتين من مستو ما . نأخذ من أجل X و Y مجموعة نقط Γ . ومن أجل G مجموعة الثنائيات $(x, y) \in X \times X$

الواقعة على نفس المماس لـ Γ. ما هي نقط Γ حيث f معرف؟ ما هو عدد النقط التي هي في إتصال وفق f مع نقطة حيث f معرف؟

م 7. ليكن $f = (G, X, Y)$ إتصالاً بين مجموعتين X و Y (إنظر التمرين 6) من أجل كل جزء A من X، يرمز بـ$f(A)$ لمجموعة العناصر $y \in Y$ التي هي في إتصال وفق f مع عنصر $x \in A$ على الأقل. ومن أجل كل جزء B من Y يرمز بـ

$$f^{-1}(B)$$

لمجموعة العناصر $x \in X$ بحيث يوجد على الأقل $y \in Y$ في إتصال مع x. برهن العلاقتين:

$$A \subset f^{-1}(f(A)) \quad \text{،} \quad B \supset f(f^{-1}(B))$$

م 8. ليكن $f = (G, X, Y)$ و $g = (H, Y, Z)$ إتصالين، نسمي تركيب g و f الإتصال:

$$g \circ f = (K, X, Z) = h$$

المعرف كما يلي: يكون لدينا $(x, z) \in K$ إذاً وإذا فقط وجد $y \in Y$ بحيث يكون لدينا $(x, y) \in G$ و $(y, z) \in H$. بين أن هذا التعريف يعمم تعريف تركيب تطبيقين، وسع النظرية 2 من ف 2 لكي تشمل الإتصالات. ليكن A جزء معطى من X، هل لنا بالضرورة $h(A) = g(f(A))$؟ إذا كان $f = (G, X, Y)$ إتصالاً، نسمي إتصالاً عكسياً لِـf الإتصال:

$$f^{-1} = (G', Y, X)$$

حيث $G' \subset Y \times X$ هي مجموعة الثنائيات (y, x) بحيث يكون $(x, y) \in G$. هل يساوي التركيب $f^{-1} \circ f$ التطبيق المطابق لـ X؟

إذا كان f تطبيقاً لِـ X في Y، بين أنه حتى يكون الإتصال العكسي لـ f هو أيضاً تطبيقاً يلزم ويكفي أن يكون f تقابلاً، فيكون عندئذ الإتصال العكسي f^{-1} مطابقاً مع التطبيق العكسي لـ f.

ليكن $f = (G, X, Y)$ و $g = (H, Y, Z)$ إتصالين. هل الدستور

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

صحيح؟

9. ليكن f تطبيقاً لمجموعة X في مجموعة Y لنفرض أن العلاقة:

$$f(x') \neq f(x'')$$

تستلزم $x' \neq x''$. برهن أن f متباين.

1. لتكن $(A_i)_{i\in I}$ جماعة من أجزاء مجموعة X ، و $(B_j)_{j\in J}$ جماعة أجزاء مجموعة Y . بإستخدام تقاطعات وإتحادات هاتين الجماعتين ، إحسب تقاطع وإتحاد الجماعة $(A_i \times B_j)_{(i,j)\in I\times J}$ المكونة من أجزاء $X\times Y$.

2. لتكن $(A_i)_{i\in I}$ جماعة من أجزاء مجموعة X ، فلدينا إذن $\mathcal{P}(A_i) \subset \mathcal{P}(X)$ من أجل كل $i \in I$. هل العلاقتان :

$$\mathcal{P}\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right) = \bigcap_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$$

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) = \bigcup_{i\in I} \mathcal{P}(A_i)$$

صحيحتان؟

3. لتكن X و Y مجموعتين و $(X_i)_{i\in I}$ جماعة من أجزاء X ، ذات الإتحاد يساوي المجموعة X بأكملها . ليكن ، من أجل كل $i \in I$ ، f_i تطبيقاً لـ X_i في Y معطى . اثبت أن الشرطين التاليين متكافئان : أ) من أجل كل $i, j \in I$ لدينا $f_i(x) = f_j(x)$ من أجل كل $x \in X_i \cap X_j$ ؛ ب) يوجد تطبيق f لـ X في Y ينطبق مع f_i في X_i وهذا من أجل كل $i \in I$. فيكون عندئذ التطبيق f وحيداً (فنقول إنه ناتج «عن إلصاق» التطبيقات f_i).

4. نسمى «تغطية» للمجموعة X كل جماعة $(U_i)_{i\in I}$ من أجزاء X ذات إتحاد يساوي المجموعة X بأكملها . لتكن $(U_i)_{i\in I}$ و $(V_j)_{j\in J}$ تغطيتين لـ X ، نقول عن التغطية الثانية إنها «أدق» من الأولى إذا وجد ، من أجل كل $j \in J$ ، دليل $i \in I$ بحيث يكون لدينا $V_j \subset U_i$. اثبت أنه مهما كانت التغطيتان لـ X المعطيتين ، توجد تغطية لـ X أدق منها .

م 5. نسمي «تصوراً تجسيمياً» كل كائن مكون من مجموعة K، ومن مجموعة مكونة من أجزاء منتهية وغير خالية من K (وندعى هذه الأجزاء «مجسمات» التصور التجسيمي المعتبر)، بحيث يكون الشرط التالي محققاً: كل جزء غير خالٍ من مجسم من K هو بدوره مجسم من K [فليس إذن التصور التجسيمي مجموعة K فقط، بل هي ثنائية مكونة من K ومن مجموعة من أجزاء K؛ ومع ذلك يرمز دائماً للتصور التجسيمي بنفس الحرف الذي يرمز به للمجموعة الموافقة. ليكن K تصوراً تجسيمياً. نسمي مجسمًا ذا n بعدا كل مجسم يشتمل على $n + 1$ عنصراً. تدعى المجسمات ذات 0 بعد برؤوس K وتدعى المجسمات ذات بعدا واحد بحرف K وتدعى المجسمات ذات بعدين بوجوه (أو سطوح) K، الخ ...] يعود إدخال مفهوم التصور التجسيمي خاصة إلى دراسة الخواص «التوبولوجية» للمجسمات (أو متعددات السطوح) ذات أبعاد كيفية. ظهر هذا المفهوم منذ ألر (أو أيلر) الذي برهن على النتيجة التالية: ليكن في الفضاء المألوف سطح متعدد الوجوه ذا a رأساً و b حرفاً و c سطحاً، فالعدد $a - b + c$ لا يتعلق بالطريقة المستعملة لتقسيم هذا السطح إلى مثلثات. إنطلاقاً من سطح متعدد الوجوه مقسم إلى مثلثات يمكن إنشاء تصور تجسيمي كما يلي:

المجموعة K هي مجموعة رؤوس المجسم P المعتبر. كل جزء ذي عنصر واحد من K هو مجسم من K؛ كل جزء $\{a, b\}$ ذي عنصرين من K، هو حرف إذا كانت القطعة المستقيمة، التي تربط النقطة a بالنقطة b، حرفاً من حروف P؛ وأخيراً يكون الجزء $\{a, b, c\}$ ذو 3 عناصر وجهاً لـ K إذا كان المثلث ذو الرؤوس a، b، c وجهاً من وجوه P. التعميم إلى عدد كيفي من الأبعاد بسيط]

أ) لتكن X مجموعة ما و $(U_i)_{i \in I}$ تغطية لـ X لنتفق على أن نسمي مجسمًا على جزء S منته من مجموعة الأدلة I وغير خالٍ بحيث يكون التقاطع:

$$\bigcap_{i \in S} U_i$$

غير خالٍ أثبت أن الثنائية المكونة من المجموعة I ومن المجسمات التي سبق تعريفها هي تصور تجسيمي (يدعى «بعصب» التغطية المعطاة).

ب) ليكن K تصوراً تجسمياً. نرمز بـ$P(K)$ لمجموعة التوابع f المعرفة على K وذات قيم حقيقية والتي تحقق الخواص الثلاث التالية: المجموعة المكونة من العناصر بحيث $x \in K$ و $f(x) \neq 0$ مجسم من K، لدينا $f(x) \geq 0$ من أجل كل $x \in K$ وأخيراً المجموع:

$$\sum_{x \in K} f(x)$$

المكون من جميع قيم f في نقط K، يساوي 1 (لا يحتوي المجموع السابق إلا على عدد منته من الحدود الغير معدومة). وأخيراً، نرمز بـU_x لمجموعة العناصر $f \in P(K)$ بحيث $f(x) \neq 0$. إثبت أن المجموعة $(U_x)_{x \in K}$ تشكل تغطية لـ$P(K)$ وأن عصب هذه التغطية هو بالضبط التصور التجسمي المعطى K.

[إذا كان التصور التجسمي منتهياً ومكوناً من n عنصراً $x_1, \ldots, x_n$ يمكن تمثيل كل $f \in P(K)$ بنقطة من $\mathbf{R}^n$ إحداثياتها هي الأعداد $f(x_1), \ldots, f(x_n)$. فنحصل حينئذٍ على تقابل بين $P(K)$ ومجسم متعدد الوجوه في الفضاء $\mathbf{R}^n$، ويتعلق «شكل» متعدد الوجوه هذا بالعلاقات التوفيقية الكائنة بين المجسمات المختلفة للتصور التجسمي المعطى. وهذه هي العملية الأساسية التي تسمح بتحويل مسألة «نوعية» محضة ظاهرياً، هي دراسة «شكل» متعدد السطوح، إلى مسألة جبرية «محضة»، هي دراسة التصورات التجسمية المنتهية]

1. نسمي «تجزئة» للمجموعة X كل جماعة $(A_i)_{i \in I}$ من أجزاء X غير خالية ومنفصلة مثنى مثنى وذات إتحاد يساوي X . لنأخذ تجزئة لـ X نرمز لها كما ورد أعلاه ولنعتبر العلاقة :

«يوجد $I \ni i$ بحيث $A_i \ni x$ و $A_i \ni y$»

بين عنصرين x و y من X . أثبت أن هذه العلاقة هي علاقة تكافؤ ، ثم أعط صفوف تكافئها والمجموعة الحاصلة عن قسمة X بهذه العلاقة إثبت أنه يمكن الحصول على كل علاقة تكافؤ على X بهذه الطريقة .

م2. لتكن R و S علاقتي تكافؤ على المجموعتين X و Y . إذا كان (x', y') و (x'', y'') عنصرين من $X \times Y$. نشير بـ$T\{(x', y')$ و $(x'', y'')\}$ لإتحاد العلاقتين $R\{x', x''\}$ و $S\{y', y''\}$ ، إثبت أن T علاقة تكافؤ على $X \times Y$. شيد بيان T بدلالة بياني R و T . عرّف تقابلاً «قانونياً» بين حاصل قسمة $X \times Y$ على T والمجموعة $(X/R) \times (Y/S)$.

بين ، مستخدماً هذه النتائج ، أن النظرية 3 من 4§ هي حالة خاصة من النظرية 2 .

3. لتكن ، في مستو مزود بمحوري إحداثيات متعامدين ، نقطتان P' و P'' ذات الإحداثيات (x', y') و (x'', y'') على التوالي . لنرمز بـ$R\{P', P''\}$ للعلاقة $x' y' = x'' y''$. إثبت أن هذه علاقة تكافؤ على المستوى ، ثم شيد صفوف تكافئها .

نشير الآن بـ$S(P', P'')$ للعلاقة :

$$(x' x'' \geq 0 \quad \text{و} \quad x' y' = x'' y'')$$

هل هي أيضاً علاقة تكافؤ؟

4. لتكن A مجموعة و B جزءاً منها. يرمز بـ $R\{X, Y\}$ للعلاقة $X \cap B = Y \cap B$ إثبت أن هذه العلاقة علاقة تكافؤ على المجموعة $\mathcal{P}(A)$ ثم شيّد تقابلاً بين $\mathcal{P}(A)/R$ والمجموعة $\mathcal{P}(B)$.

5. شيد جدولي الجمع والضرب للأعداد الصحيحة بترديد 17.

6. ليكن E الفضاء المألوف (الذي يعتبر كمجموعة نقط). نختار بصفة نهائية نقطة O من E، وإذا كانت P' و P'' نقطتين، نرمز بـ $R\{P', P''\}$ للعلاقة:

(تقع النقط 0 و P' و P'' على نفس المستقيم)

هل هي علاقة تكافؤ على E؟ نرمز بـ E^* لمجموعة النقط $E \ni P$ غير النقطة O بحيث أن $E^* = E - \{0\}$؛ إثبت أن R علاقة تكافؤ على E^* ثم عين صفوف التكافؤ الموافقة لها (تدعى المجموعة الخاصة E^*/R بالمستوى الإسقاطي).

7. لتكن X مجموعة جميع التطبيقات لـ $\mathbf{R}$ في $\mathbf{R}$ (توابع للمتحول الحقيقي t، معرفة مهما كان t وذات قيم حقيقية). ليكن x و y عنصرين معطيين من X، نرمز بـ $R\{x, y\}$ للعلاقة.

(يوجد عدد $0 < c$ بحيث يكون لدينا $x(t) = y(t)$ من أجل $|t| < c$)

اثبت أن R علاقة تكافؤ على X.

8. لتكن X مجموعة التطبيقات لـ $\mathbf{R}$ في $\mathbf{R}$؛ ليكن في كل ما يلي n عدداً طبيعياً مختاراً. ليكن x و y تطبيقين معطيين من X. إذا كان $R\{x, y\}$ يرمز للعلاقة:

$$\left(\lim_{t \to 0} \frac{x(t) - y(t)}{t^n} = 0 \right)$$

(التي تكتب عادة $x(t) - y(t) = 0(t^n)\ (t \to 0)$) اثبت أن R علاقة تكافؤ على X.

9. لتكن X و Y مجموعتين و R و S علاقتي تكافؤ على X و Y و f تطبيقاً لِـ X في Y ليكن التصور :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow p & & \downarrow q \\ X/R & & Y/S \end{array}$$

حيث تشير p و q لتطبيقي X و Y القانونين على حاصلي قسمتيهما على R و S . أثبت أن الخاصيتين التاليتين متكافئتان :

(1) يوجد تطبيق $\bar{f}: X/R \to Y/S$

بحيث $\bar{f} \circ p = q \circ f$ ؛

(2) مهما كان x' و x'' ، فإن العلاقة

$$x' \equiv x'' \pmod R$$

تستلزم

$$f(x') \equiv f(x''') \pmod S$$

برهن أيضاً أنه إذا كانت العلاقة (2) محققة ، يوجد تطبيق وحيد يحقق (1) .

مثال : نأخذ $\mathbf{Z} = X = Y$ مجموعة الأعداد الصحيحة ونأخذ R علاقة التوافقات وفق r و S علاقة التوافقات وفق s (حيث r و s عددان طبيعيان معطيان) ؛ ونأخذ أخيراً f التطبيق المطابق لِـ X في Y . في أية حالة يمكن تطبيق النتيجة السابقة؟

10. ليكن K تصوراً تجسيمًا (§3 ، التمرين 5) ؛ لنفرض أن كل جزء وحيد العنصر من K هو مجسم من K . إذا كان x و y عنصرين معطيين من K ، يرمز بِـ $R\{x, y\}$ للعلاقة التالية

يوجد عدد طبيعي $n \geq 0$ ورؤوس :

$$z_0 = x, z_1, \ldots, z_n = y$$

لـ K بحيث تكون المجموعة $\{z_i , z_{i+1}\}$ مجسمًا من K من أجل كل i بحيث $0 \leq i < n$.

إثبت أن R علاقة تكافؤ على المجموعة K [تدعى الصفوف وفق R بالمركبات المترابطة للتصور التجسمي K ؛ ونقول أن K مترابط إذا كان يحتوي على مركبة مترابطة وحيدة].

م 1. لتكن X مجموعة وليكن f تطبيقاً لِـ X في مجموعة أجزاء $\mathcal{P}(X)$. لنرمز بِـ A لمجموعة العناصر $x \in X$ التي تحقق العلاقة $x \notin f(x)$. اثبت أنه لا يوجد عنصر $x \in X$ بحيث $A = f(x)$. إستنتج أنه لا يوجد تطبيق غامر لِـ X في $\mathcal{P}(X)$ ، وبالتالي لدينا :

$$x < 2^x$$

من أجل كل عدد أصلي (أو كردينالي) x (ج . كانتو)

م 2. لتكن $(f_n)_{n \in \mathbf{N}}$ متتالية تطبيقات لِـ $\mathbf{N}$ في نفسه ؛ نعرف تطبيق f لِـ $\mathbf{N}$ في $\mathbf{N}$ بوضع :

$f(n) = f_n(n) + 1$ من أجل كل $n \in \mathbf{N}$.

برهن أنه لا يوجد عدد طبيعي $p \in \mathbf{N}$ بحيث $f = f_p$. إستنتج أن مجموعة تطبيقات لِـ $\mathbf{N}$ في $\mathbf{N}$ غير قابلة للعد (ج . كانتور) .

م 3. برهن أن إتحاد عدد لا منته وقابل للعد من مجموعات قابلة للعد هو بدوره مجموعة قابلة للعد (إستوح بالطريقة المستعملة في المثال 1 من رقم 5) .

4. لتكن I مجموعة الأعداد الحقيقية الواقعة بين 0 و 1 ؛ لنمثل كل $x \in I$ بنشر عشري غير محدود (يمكن أن ينتهي هذا النشر بعدد غير منته من الأصفار) .

لتكن $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ متتالية من عناصر I ؛ لنشكل عدداً $x \in I$ كما يلي :

يكون عُشري x النوني (الواقع في الرتبة n) مساوياً لـ 1 إذا كان عشري x_n النوني لا يساوي 1، ومساوياً لـ 2 إذا كان عشري x_n النوني يساوي 1. إثبت أن $x \neq x_n$ من أجل كل n. إستخلص من هذا أن المجموعة I (وبالأحرى مجموعة جميع الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$) غير قابلة للعد (ج. كانتور).

وضّح التشابه الكائن بين هذا الإستدلال وذلك المستعمل أعلاه في التمرين 2.

م م 5. ليكن f تقابلاً بين مجموعة X وجزء Y_1 من مجموعة Y، و g تقابلاً بين Y وجزءٍ X_1 من X. ننوي البرهان على أن قوة X تساوي قوة Y (عن برنشتاين). ولهذا الغرض، نعرف أجزاء A_n من X و B_n من Y بوضع:

$$A_0 = X - X_1,\ B_1 = f(A_0),\ A_1 = g(B_1)\ ,\ B_2 = f(A_1),\ A_2 = g(B_2), \dots$$

ثم نعرف تطبيقاً h لِـ X في Y كما يلي: إذا كان $x \in X$ عنصراً معطى، نأخذ:

$$h(x) = f(x) \quad \text{إذا كان} \quad x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

وإلا (فعندئذٍ $x \in X_1$)

$$h(x) = g^{-1}(x)$$

إثبت أن h تقابل بين X و Y.

6. لتكن E مجموعة منتهية وذات h عنصراً، و n عدداً طبيعياً.

نعتبر التطبيقات f لِـ E في $\mathbb{N}$ التي يكون من أجلها مجموع الـ h عدداً $f(x)$، $x \in E$ يساوي على الأكثر n. بيّن أن عدد هذه التطبيقات المعتبرة يساوي:

$$\binom{n+h}{n}$$

7. ليكن n عدداً طبيعياً ما أثبت أن مجموع معاملات ثنائي الحد $\binom{n}{p}$ يساوي 2^n.

م 8. إثبت العلاقة :

$$\binom{n}{0}\cdot\binom{n}{p}+\binom{n}{1}\cdot\binom{n-1}{n-1}+\binom{n}{2}\cdot\binom{n-2}{p-2}+\ldots+\binom{n}{p}\cdot\binom{n-p}{0}=2^n\cdot\binom{n}{p}$$

(أبحث أولاً ، في مجموعة X ذات n عنصراً، عن عدد الأجزاء ذات p عنصراً والتي تحتوي على k عنصراً معطى مسبقاً) .

م 9. لتكن p و n عددين بحيث $1 \leq p \leq n$ ، و $S_{n,p}$ عدد التطبيقات الغامرة لـ $\{1, 2, \ldots, n\}$ في $\{1, 2, \ldots, p\}$. إثبت أن

$$p^n = S_{n,p} + \binom{p}{1}\cdot S_{n,p-1} + \binom{p}{2}\cdot S_{n,p-2} + \ldots + \binom{p}{p-1}$$

إستنتج أن :

$$S_{n,p} = p^n - \binom{p}{1}\cdot(p-1)^n + \binom{p}{2}\cdot(p-2)^n - \ldots + (-1)^{p-1}\binom{p}{p-1} .$$

إختصر هذه النتيجة من أجل $p = 2, 3$.

م م م 10. لتكن E و F مجموعتين منتهيتين ، $x \mapsto A(x)$, تطبيقاً لـ E في مجموعة أجزاء F . حتى يوجد تطبيق f لـ E في F متباين ويحقق :

$$f(x) \in A(x) \text{ من أجل كل } x \in E$$

يلزم ويكفي أن يكون لدينا :

$$\text{Card}\left(\bigcup_{x\in H} A(x)\right) \geq \text{Card}\,(H)$$

من أجل كل جزء H من E . (تدعى هذه النتيجة عموماً بتوطئة الزواج) .

11. بإستخدام النتيجة القائلة بأنه يوجد ، في كل مجموعة أعداد طبيعية (منتهية أم لا) ، عدد أصغر من جميع الأعداد الأخرى ؛ برهن النتيجتين الكلاسيكيتين التاليتين :

أ) لكل عدد طبيعي $n \geq 2$ قاسم أولي على الأقل (نسمي عدداً أولياً كل عدد طبيعي $p \geq 2$ ليس له قواسم موجبة إلا 1 و p) .

ب) ليكن a و b عددين طبيعيين مع $b \geq 1$ ، فيوجد عددان طبيعيان q و r بحيث :

$$a = bq + r \quad , \quad r < b$$

حيث q و r وحيدان (قسمة إقليدية ، أو قسمة ، a و b بالباقي) .

12. برهن أن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

م13. إن مجموعة الأعداد الأولية ذات الشكل $4n - 1$ ($6n - 1$ على التوالي) غير منتهية [وهذه النتيجة حالة خاصة من «نظرية المتوالية الحسابية» لِدرشليه التي تقول انه من أجل كل عددين a و b أوليين فيما بينهما يوجد عدد لا منته من الأعداد الأولية من الشكل $an + b$. إن البرهان العام لنظرية درشليه ، وهي إحدى النظريات الشهيرة في «نظرية الأعداد» بأكملها ، غير ممكن ، في الوقت الحالي ، باستخدام وسائل حسابية محضة ، فكل البراهين المعروفة الآن (حتى برهان درشليه نفسه ، الذي لا يزال بدون إختصار ملحوظ) تستخدم طرق تنتسب إلى التحليل الرياضي ، أو مستوحاة منه مباشرة] .

14. (نظام العدد ذو الأساس q) . نختار عدداً طبيعياً $q \geq 2$.

أ) ليكن x عدداً طبيعياً غير معدوم . أثبت أنه يوجد عدد طبيعي وحيد $n \geq 0$ ، بحيث :

$$q^n \leq x < q^{n+1}$$

ثم أنه يوجد عدد طبيعي وحيد a_n يحقق :

$$0 \leq a_n \leq q - 1 \quad , \quad a_n q^n \leq x < (a_n + 1)q^n$$

ب) اثبت أنها توجد ، من أجل كل عدد طبيعي x ، متتالية وحيدة لأعداد طبيعية $a_0, a_1, ..., a_r, ...$ التي تحقق الشروط التالية :

1) لدينا $0 \leq a_r \leq q - 1$ من أجل كل $0 \leq r$.

2) عدد الأعداد الطبيعية r بحيث $a_r \neq 0$ عدد منته .

3) لدينا :

$$x = a_0 + a_1 q + a_2 q^2 + \dots + a_r q^r + \dots$$

[هذا المجموع ، الذي يحتوي ظاهرياً على عدد لا منته من الحدود معنى وهذا بفضل الشرط (2) المفروض على الأعداد a_r] . أثبت أن العدد الطبيعي n الوارد في السؤال (أ) هو أكبر عدد بحيث $a_n \neq 0$ ، وان العدد a_n المعرف في السؤال (أ) يساوي العدد a_n الوارد في السؤال (ب) .

تدعى المتتالية :

$$a_n \; a_{n-1}, \dots, a_0$$

(هذا ليس جداء !) «بنشر x في نظام العد ذي الأساس q»

جـ) اوجد العدد 718 في نظام العد الثنائي (معناه أن الأساس $q = 2$)

د) ليكن x عددا كسريا موجبا . اثبت وجود متتالية وحيدة ذات أعداد طبيعية .

$$\dots a_n , \; a_{n-1}, \dots, \; a_0, \; a_{-1}, \; a_{-2}, \dots$$

بحيث تكون الشروط التالية محققة :

1) لدينا $0 \leq a_r \leq q - 1$ من أجل كل $r \in \mathbf{Z}$

2) عدد الأعداد الطبيعية r بحيث $a_r \neq 0$ عدد منته

3) من أجل كل $r \in \mathbf{Z}$ ، لدينا

$$a_r q^r + a_{r+1} q^{r+1} + \dots \leq x < q_r + a_r q^r + a_{r+1} q^{r+1} + \dots$$

نقول عندئذ إن

$$a_n \; a_{n-1} \dots a_0, \; a_1 \; a_{-2} \dots a_{-r} \dots$$

(حيث n هو أصغر عدد طبيعي بحيث $a_r = 0$ من أجل كل $r > n$) هو نشر x في نظام العد ذي الأساس q .

هـ) حتى تكون جماعة أعداد طبيعية $a_n (n \in \mathbb{Z})$، التي تحقق الشرطين 1) و 2) الواردين في السؤال السابق، نشراً، في نظام العد ذي الأساس q، لعدد كسري، يلزم ويكفي أن يوجد عدد صحيح r وعدد طبيعي $k \geq 1$ بحيث:

$$a_{n-k} = a_n \text{ من أجل كل } n \geq r$$

(دورية نشور الأعداد الكسرية).

15. لقد سمح نمو «البحث الفضائي» ذي الأهداف السلمية المحصة للرئيس المدير العام «للشركة الخفية الاسم للإستغلال المالي للعمليات النظرية المحضة»، وفارس جوقة الشرف، بتوفير رصيد جدير بالإهتمام، فأشترى بنورمانديا السفلى ملكاً مساحته 200 هكتار بثمن 8 000 فرنك لكل هكتار. فألهم هذا المثال عاملاً، رضاصاً وملتصقاً للتونيه، بالمؤسسة، فقرر توظيف كل سنة سدس مرتبه الذي يبلغ 800 فرنكاً شهرياً وهذا على شكل سندات خزينة بفائدة قدرها 4% سنوياً. كم سنة يجب عليه أن يعمل قبل أن يكون بإمكانه أن يكسب في نورمانديا السفلى ملكاً مساحته 200 هكتاراً حيث يقضي في هدوء ما تبقى له من حياته. (خذ بعين الإعتبار الفوائد المركبة لكن أهمل مفعول التخفيض المحتمل لقيمة النقد).

16. تعطى نفقات حرب الهند الصينية، حسب عدد جريدة لوند (العالم) الصادر في 21 جويليه 1954، بالجدول التالي:

(بالمليارات من الفرنكات القديمة).

1946 : 101,8	1949 : 177,3	1952 : 427,6
1947 : 131,3	1950 : 258,3	1953 : 403,5
1948 : 136,3	1951 : 321	1954 : 428

تأكد على هذا المثال من صحة الخاصيتين الأساسيتين للجمع (الخاصية التجميعية والخاصية التبديلية).

17. ينقسم سكان الجزائر، في نوفمبر 1954، ألى 1 230 000 أوروبي و 8 300 000 أهلي. وفي نفس التاريخ، كانت جامعة مدينة الجزائر تحتوي على 4 548

طالباً أوروبياً و 557 طالباً أهلياً. احسب، بوحدة تقريبية سفلى، النسبة بين حظوظ الأوروبي وحظوظ الأهلي للوصول إلى التعليم العالي!

1. أوجد جميع الزمر ذات عنصر واحد، عنصرين وذات 3 عناصر.

2. تزود مجموعة ذات أربعة عناصر (يرمز لها بـ e، a، b، c) في ما يلي بقانون التشكيل التبديلي المعطى بجدول الضرب التالي:

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

اثبت أننا نحصل بهذه الطريقة على زمرة تبديلية وحدد جميع تشاكلاتها الذاتية. (تعرف هذه الزمرة بزمرة كلين). مثل هندسيا هذه الزمرة (إعتبر، في الفضاء، التناظرات بالنسبة لحرف في ثلاثي السطوح قائم).

3. أثبت أن الزمرة σ_4 لتباديل المجموعة $\{1, 2, 3, 4\}$ تحتوي على زمرة جزئية مميزة متشاكلة مع زمرة كلين.

4. نزود مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ بقانون التشكيل التالي:

$$(x, y) \mapsto \sqrt[3]{x^3 + y^3}$$

أثبت أننا نحصل بهذه الطريقة على زمرة، متشاكلة مع الزمرة الجمعية $\mathbf{R}$.

5. لتكن الزمر G_1، ...، G_n ولتكن H_1، ...، H_n زمر جزئية منها، أثبت أن $H_1 \times ... \times H_n$ زمرة جزئية من الزمرة الجدائية $G_1 \times ... \times G_n$.

6. لتكن G زمرة ضربية. نعرف، من أجل كل $a \in G$، تطبيقاً s_a لـ G في G بوضع:

$$s_a(x) = ax \quad \text{من أجل كل } x \in G$$

(إسحاب إلى اليسار) قدره a في G. سيدرك القارئ أصل هذه التسمية بإعتبار الحالة حيث G هي الزمرة الجمعية للأشعة ذات الأصل في نقطة 0 معطاة في الفضاء المألوف). أثبت أن التطبيق $a \to s_a$ تشاكل بين الزمرة G وزمرة من زمر تباديل المجموعة G.

7. لتكن G زمرة دورية ذات m عنصراً، و x مولداً لـ G، يلزم حتى يكون (x^k) مولداً لـ G ويكفي أن يكون العددان m و k أوليين فيما بينهما (إستعمل نظرية بزوت). ما هي، في الحالة العامة، رتبة الزمرة الجزئية من G المولدة عن x^k؟

8. ليكن m و n عددين صحيحين. حتى يوجد عدد صحيح r بحيث:

$$r \equiv 0 \pmod m \quad \text{و} \quad r \equiv 1 \pmod n$$

يلزم ويكفي أن يكون m و n أوليين فيما بينهما؛

م إستنتج من هذا النتيجة التالية. لتكن G زمرة تبديلية، و x و y عنصرين من G وذات الرتبتين m و n أوليتين فيما بينهما، فتكون عندئذ رتبة العنصر $z = xy$ تساوي mn، وتحتوي الزمرة الجزئية المولدة عن z العنصرين x و y. (نسمي رتبة x من زمرة ما رتبة، معناه عدد عناصر الزمرة الجزئية المولدة عن x وتكون هذه الرتبة منتهية إذا وفقط إذا وجد عدد طبيعي $n \neq 0$ بحيث:

$$x^n = e$$

في هذه الحالة، رتبة x هي أصغر عدد $n \geq 1$ بحيث تكون العلاقة السابقة محققة، وهذا ما سيبرهنه القارئ).

م9. لتكن G و H زمرتين دوريتين ذات m و n عنصراً. حتى تكون $G \times H$ دورية يلزم ويكفي أن يكون m و n أوليين فيما بينهما.

إذا كان x و y مولدين لـ G و H يكون (x, y) مولداً لـ $G \times H$.

م10. إن كل زمرة منتهية وذات رتبة أولية هي زمرة دورية، وتقبل كمولد لها كل عنصر منها مختلف عن العنصر الحيادي (استخدم النظرية 4 § 7، أو التمرين 7).

م11. ليكن A جزء من الزمرة G. نسمي «ممركز» A في G المجموعة $Z(A)$ للعناصر $x \in G$ بحيث $xa = ax$ مهما كان $a \in A$. أثبت أن $Z(A)$ زمرة جزئية من G. أثبت أن $Z(G)$ (الذي يدعى بمركز G) زمرة جزئية تبديلية ولا متغيرة من G.

12. نقول عن عنصرين x و y من زمرة G أنهما «مترافقان» إذا وجد عنصر $s \in G$ بحيث:

$$y = s x s^{-1}$$

أثبت أن

x و y مترافقان

علاقة تكافؤ على المجموعة G. نأخذ G يساوي زمرة الدورانات حول نقطة 0 معطاة في الفضاء ثم نختار مستقيماً D ماراً بـ 0. أثبت أن كل عنصر من G مترافق مع دوران حول D.

13. ليكن A جزء معطى من زمرة G، نرمز بـ $s A s^{-1}$ (من أجل $s \in G$) لمجموعة عناصر G من الشكل $s x s^{-1}$ مع $x \in A$. إذا كانت A زمرة جزئية، أثبت أن $s A s^{-1}$ زمرة جزئية أيضاً (ونقول عندئذ أنها زمرة جزئية مترافقة مع A في G). نسمي منظم الزمرة الجزئية A من G المجموعة $N(A)$ ذات العناصر $s \in G$ بحيث $s A s^{-1} = A$. أثبت أن ممركز A (تمرين 11) هو زمرة لا متغيرة من منظم A.

14. لتكن G زمرة مؤثرة على مجموعة X .

أ) أثبت أن العلاقة :

$$\text{يوجد} \quad G \ni s \quad \text{بحيث} \quad y = sx$$

علاقة تكافؤ على المجموعة X (يدعى صف x وفق هذه العلاقة بمدار x في G) . برهن، من أجل كل $X \ni x$ ، أن مجموعة العناصر $G \ni s$ بحيث $sx = x$ هي زمرة جزئية H_x من G (يدعى «بمُثبِّت» x في G) ثم أن مثبتات نقط مختلفة من نفس المدار هي مترافقة مع بعضها في G وهذا وفقاً لمعنى التمرين 13 .

ب) نعتبر، من أجل كل عنصر x معطى من G التطبيق f لِـ G في X المعطى بِـ

$$f(s) = sx$$

أثبت أنه يكتب كتركيب التطبيق القانوني لِـ G على G/H_x مع تطبيق لِـ G/H_x في X ؛ أثبت أنه ينتج عن هذا التطبيق تقابل بين G/H_x و M مدار x في G ، ثم أن $\text{Card}(G) = \text{Card}(H_x) \cdot \text{Card}(M)$ ، إذا كان G منتهياً.

ج) صف المدارات والمثبتات عندما نأخذ من أجل X الفضاء المألوف ومن أجل G زمرة الدورانات حول نقطة 0 معطاة في X .

م د) نفرض أن G منتهية وأن رتبتها قوة عدد أولي p وأن X منتهية وأن رتبتها ليست من مضاعفات p . أثبت عندئذٍ أن G يقبل نقطة صامدة على الأقل في X (معناه يوجد $X \ni x$ بحيث $sx = x$ من أجل كل $G \ni s$) .

م هـ) لتكن «p – زمرة» G معناه زمرة منتهية ومرتبتها قوة لعدد أولي p . نجعل G تؤثر على نفسها بواسطة التشاكلات الذاتية الداخلية (إنظر المثال 19) ، أثبت أن مركز G (التمرين 11) غير مقتصر على العنصر الحيادي .

م 15. لتكن G زمرة و H زمرة جزئية من G ؛ ولنجعل G تؤثر على G/H

(مثال 20) . إذا كان $N(H)$ يرمز لمنظم H في G المعرف في التمرين 13 أعلاه ، أثبت أن عناصر G/H ذات مثبتات تحتوي على H هي صور عناصر الزمرة الجزئية $N(H)$ وفق التطبيق القانوني لِـ G في G/H .

م 16. لتكن H زمرة جزئية لا متغيرة من زمرة G . أثبت أنه يوجد على المجموعة G/H قانون تشكيل وحيد يجعل G/H زمرةً وبحيث يكون التطبيق القانوني لِـ G في G/H تماثلاً للزمرة الأولى في الزمرة الثانية (إستخدم النظرية 3 من 4 §) ؛ تدعى الزمرة المحصل عليها بهذا النحو بالزمرة الحاصلة عن (قسمة) G على H .

ماذا يحدث لما نأخذ من أجل G الزمرة الجمعية $\mathbf{Z}$ (للأعداد الصحيحة) ومن أجل H زمرة جزئية من G؟

ليكن p التطبيق القانوني لِـ G في G/H ، أثبت أنها توجد من أجل كل زمرة جزئية A من G/H ، زمرة جزئية وحيدة K من G تحتوي على H وبحيث $A = p(K)$ وأن زيادة على ذلك $K = p^{-1}(A)$. تسمى «الزمرة الجزئية المشتقة» من G الزمرة المرموز لها بِـ G' . أو $D(G)$ والمولدة عن العناصر من الشكل $xyx^{-1}y^{-1}$.

أثبت أن $D(G)$ زمرة جزئية لا متغيرة من G ، وأنه من أجل H زمرة جزئية لا متغيرة من G ، حتى تكون الزمرة الحاصلة G/H تبديلية يلزم ويكفي أن يكون لدينا $H \supset D(G)$.

م م17. لتكن A و B زمرتين جزئيتين من زمرة G ، نشير بِـ(A, B) للزمرة الجزئية من G المولدة عن العناصر $xyx^{-1}y^{-1}$ حيث $x \in A$ و $y \in B$. لنضع :

$$D(G) = (G, G), D^2(G) = D\big(D(G)\big), D^3(G) = D\big(D^2(G)\big), \ldots$$

أثبت أن الشروط التالية متكافئة :

أ) يوجد عدد طبيعي r بحيث $D^{r+1}(G) = \{e\}$

ب) يمكن إنشاء زمر جزئية :

$$\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_s = G$$

من G بحيث ، من أجل كل دليل i مع $0 \leq i \leq s-1$ ، تكون الزمرة الجزئية H_i لا متغيرة في H_{i+1} وتكون الزمرة الحاصلة H_{i+1}/H_i تبديلية (إن مفهوم الزمرة الحاصلة معرف في التمرين السابق)

حـ) يمكن إنشاء زمر جزئية لا متغيرة :

$$\{e\} = K_0 \subset K_1 \subset \ldots \subset K_r = G$$

من G بحيث تكون كل الزمرة الحاصلة K_{j+1}/K_j تبديلية .

نقول عن الزمرة التي تحقق هذه الشروط إنها «قابلة للحل» . أثبت أن كل زمرة جزئية من زمرة قابلة للحل هي بدورها قابلة للحل . لتكن G زمرة و H زمرة جزئية لا متغيرة من G ؛

إذا كانت الزمرتان H و G/H قابلتين للحل ، تكون G قابلة للحل .

م 18. لتكن G p – زمرة (التمرين 14) . اثبت أن كل زمرة جزئية وكل زمرة حاصلة من G هي بدورها p – زمرة . بإستخدام التمرين 14 ، هـ) اثبت أن G تحتوي على زمر جزئية لا متغيرة .

$$\{e\} = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_s = G$$

بحيث تكون الحواصل H_i/H_{i-1} متشاكلة مع الزمرة الجمعية $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ معناه تكون دورية من الرتبة p) من أجل $1 \leq i \leq s$. وتكون بصفة خاصة كل p – زمرة قابلة للحل .

19. لتكن G زمرة دورية ذات مرتبة منتهية n .

أ) ليكن d قاسماً لـ n اثبت أن عدد العناصر $x \in G$ بحيث $x^d = e$ يساوي d .

ب) ليكن d قاسماً لـ n . حتى يمكن كتابة عنصر $x \in G$ على الشكل y^d بإختيار مناسب لـ y ، يلزم ويكفي أن يكون لدينا :

$$x^{n/d} = e$$

م م**20.** لتكن G زمرة تبديلية منتهية ذات الرتبة n . نفرض أن عدد العناصر $x \in G$ بحيث :

$$x^d = e$$

يساوي d على الأكثر وهذا من أجل كل قاسم d لـ n ، نحن ننوي البرهان على أن G دورية (وهذه نتيجة ضرورية في دراسة الحقول المنتهية : إنظر § 33 ، التمرين 2) . نحن نشير فيمايلي بـ :

$$n = p_1^{r_1} \dots p_h^{r_h}$$

لتحليل n إلى عناصر أولية .

أ) اثبت أنه يوجد ، من أجل كل i مع $1 \leq i \leq h$ ، عنصر $a_i \in G$ بحيث :

$$a_i^{p_i^{r_i}} = e \ , \ a_i^{p_i^{r_i - 1}} \neq e$$

وأن رتبة a_i تساوي بالضبط :

$$q_i = p_i^{r_i}$$

ب) اثبت ، باستخدام كون الأعداد q_i أولية مثنى مثنى فيما بينها ، أن رتبة العنصر $a_1 \dots a_h$ تساوي $n = q_1 \dots q_h$ ، ثم إستنتج أن G دورية كما ورد أعلاه .

ج) اثبت أنه يمكن إدراك النتيجة نفسها بالإعتماد على شرط أضعف من السابق وهو : من أجل كل i مع $1 \leq i \leq h$ ، يكون عدد العناصر $x \in G$ بحيث :

$$x^{p_i} = e$$

يساوي p_i على الأكثر .

21. ليكن f تماثلاً لزمرة منتهية G في زمرة ما H . اثبت أن :

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(\text{Ker}(f)) \cdot \text{Card}(Im(f))$$

م م 22. لتكن G زمرة تبديلية منتهية و n عدداً طبيعياً بحيث(*).

$x^n = e$ من أجل كل $x \in G$

أ) نفرض أن $n = rs$ مع r و s أوليين فيما بينهما ، ولتكن M (N على التوالي) مجموعة العناصر x بحيث :

$$x^r = e \quad (x^s = e \text{ على التوالي})$$

اثبت أن M و N زمرتان جزئيتان من G . بكتابة متطابقة بزوت من أجل r و s . اثبت أن التطبيق :

$$f : M \times N \to G$$

المعطى بـ $f(x, y) = xy$ تشاكل بين الزمرتين .

ب) ليكن :

$$n = p_1^{r_1} \ldots p_h^{r_h} = q_1 \ldots q_h \quad \text{حيث} \quad q_i = p_i^{r_i}$$

تحليل n إلى عناصر أولية ، ليكن ، من أجل كل i مع $1 \le i \le h$ ، M_i الزمرة الجزئية المكونة من العناصر x من G بحيث :

$$x^{q_i} = e$$

اثبت أنه يوجد تشاكل بين G وجداء الزمر $M_1, \ldots, M_h$ المباشر .

ج) لتكن M زمرة تبديلية منتهية ، و p عدداً أولياً و r عدداً طبيعياً ، لنفرض أن :

$$x^{p^r} = e$$

من أجل كل $x \in M$. اثبت أن $\text{Card}(M)$ يساوي قوة العدد p (لاحظ أنه ، إذا كان $M \neq \{e\}$ ، يمكن إيجاد في M زمرة جزئية M' ذات الرتبة p ، ثم أن إدخال الزمرة الحاصلة M/M' يسمح بالإستدلال بالتدريج على عدد عناصر M) .

(*) كتب نص هذا التمرين بإستعمال تأشيرة الضرب لكنه ، من المفيد أن يترجمه القارئ إلى تأشيرة الجمع .

د) برهن النظرية التالية : لتكن G زمرة تبديلية منتهية ذات الرتبة :

$$n = p_1^{r_1} \dots p_h^{r_h}$$

فيوجد عندئذٍ تشاكل بين G والجداء المباشر لـ h زمرة ذات الرتبة p_1 ، ... ، p_h (ستكتمل هذه النتيجة ، التي برهنها إلى حد ما غوس في 1801 ، في تمارين § 31 : إن كل زمرة تبديلية ذات رتبة تساوي إحدى القوى p متشاكلة مع جداء مباشر لزمر دورية ذات رتب تساوي قوى لـ p فينتج عن هذا أن كل زمرة تبديلية ومنتهية متشاكلة مع جداء مباشر لزمر دورية . لقد أعطى كرونكر في 1870 دراسة كاملة للزمر التبديلية ذات عدد منته من المولدات ، فكل زمرة من هذا النوع هي جداء مباشر لزمرة تبيدلية منتهية مع إحدى الزمر Z^n) .

م23. لنعد إلى السؤال أ .) الوارد في التمرين السابق . لتكن A (B على التوالي) الزمرة الجزئية من G المكونة من العناصر x بحيث :

$x = y^s$ ($x = y^r$ على التوالي)

من أجل y من G على الأقل . اثبت أن $A = M$ و $B = N$ (برهن العلاقات) :

$$\text{Card}(G) = \text{Card}(M)\,\text{Card}(N) = \text{Card}(A)\,\text{Card}(N) =$$
$$= \text{Card}(B)\,\text{Card}(M)$$

ثم لاحظ أن $A \subset M$ و $B \subset N$) .

إذا كان $n = \text{Card}(G)$ اثبت أن $\text{Card}(M) = r$ ، $\text{Card}(N) = s$.

24. ليكن $s \in \sigma_n$ تبديلا للمجموعة $X = \{1, 2, ..., n\}$ و G الزمرة الجزئية من σ_n المكونة من قوى s .

أ) برهن أنه يمكن إيجاد أجزاء غير خالية I_1 ، ... ، I_r من X تحقق الشروط التالية : لدينا $g(I_k) = I_k$ من أجل $1 \le k \le r$ وكل $g \in G$ ؛

المجموعات I_k منفصلة مثنى مثنى وذات إتحاد يساوي X بأكملها؛ حتى ينتمي p و q من X إلى نفس المجموعة I_k ، يلزم ويكفي أن يوجد $g \in G$ بحيث $q = g(p)$. ما العلاقة بالتمرين 14 ، أ.) ؟

ب) اثبت أن الشروط السابقة تميز المجموعات I_k . (مع هذا الإستثناء الوحيد وهو أننا نستطيع طبعاً تغيير ترتيب كتابتها)

جـ) اثبت أنه ، من أجل كل k ، يمكن كتابة عناصر I_k على شكل متتالية $i_0, ..., i_p$ بحيث يكون لدينا :

$$s(i_0) = i_1, s(i_1) = i_2, ..., s(i_{p-1}) = i_p, s(i_p) = i_0$$

(تحليل تبديل إلى دورات؛ نسمي «دورة» في s كل متتالية أعداد طبيعية $i_0, ..., i_p$ مكتوبة في ترتيبها الطبيعي ، مختلفة مثنى مثنى وتحقق العلاقات السابقة) .

د) أوجد دورات التباديل التالية :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 3 & 6 & 5 & 7 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 8 & 9 & 2 & 1 & 4 & 3 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

(ملحوظة ، إستعملنا هنا تأشيرة موحدة لتمثيل تبديل s ، وهي أن نكتب في السطر الثاني صور السطر الأول وفق s) .

هـ) ليكن s تبديلاً معطى من σ_n ولتكن n_1 ، ... ، n_r أعداد حدود مختلف دورات s . أثبت أن رتبة s (معناه أصغر عدد طبيعي $q \geq 1$ بحيث $s^q = e$ ، أو رتبة الزمرة الدورية المولدة عن s) هي أصغر مضاعف مشترك للأعداد : $n_1, ..., n_r$.

و) نعتبر التبديل :

$$s : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 10 & 2 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

احسب رتبة الزمرة الجزئية من σ_{10} المولدة عن s . احسب التبديل :

$$s^{100}$$

م م 25. نستعمل ، في هذا التمرين ، الإصطلاح التالي . لتكن متتالية معطاة :

$$G_1 \xrightarrow{f_1} G_2 \xrightarrow{f_2} G_3 \to \dots G_n \xrightarrow{f_n} G_{n+1}$$

مكونة من زمر جمعية وتماثلات $f_i : G_i \to G_{i+1}$ ، نقول عن هذه المتتالية إنها «دقيقة» إذا كانت صورة التمثيل f_i تساوي نواة التماثل التالي f_{i+1} . ونقول ، من جهة أخرى ، عن تخطيط ما ، مثلاً التخطيط :

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C & \xrightarrow{h} & D & \xrightarrow{k} & E \\ \downarrow p & & \downarrow q & & \downarrow r & & \downarrow s & & \downarrow t \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' & \xrightarrow{h'} & D' & \xrightarrow{k'} & E' \end{array} \qquad (1)$$

المكون من مجموعات ومن تطبيقات لهذه المجموعات بعضها في بعض ، إنه «تبديلي» إذا تحقق ما يلي : مهما كان «الرأسان» X و Y من هذا التخطيط ، فجميع تطبيقات X في Y المحصل عليها بتركيب ، بكل الطرق الممكنة ، تطبيقات التخطيط المعطى ، متساوية . في حالة التخطيط (1) تترجم الخاصية التبديلية بالعلاقة $f' \circ p = q \circ f$ وبعده علاقات أخرى مماثلة نطلب من القارئ أن يكتبها .

نعتبر تخطيطاً تبديلياً ما (1) حيث A ، B ، . . . زمر جمعية والتطبيقات تمثيلات بعضها في بعض . نفرض أن السطرين الأفقيين لهذا التخطيط يُشكلان متتاليتين دقيقتين - بحيث أن لدينا :

$$\operatorname{Im}(f) = \operatorname{Ker}(g), \; \operatorname{Im}(f') = \operatorname{Ker}(g')$$

الخ . . . اثبت النتائج التالية (المعروفة باسم «توطئة الخمسات»)

أ) إذا كان p غامراً وكان q و s متباينين ، فيكون r عندئذٍ متبايناً .

$$u^q(x) = 0 \text{ من أجل كل } x \in K$$

أثبت العلاقة :

$$u^p(x) = \sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} a^{p-k} \, x a^k \cdot$$

هـ) نقول عن عنصر ما u من K إنه «وحيد القوة» إذا كان $u - 1$ عديم القوة .

أثبت أنه ، إذا كان u و v من K وحيدي القوة ويتبادلان ، فيكون عندئذ uv وحيد القوة . أثبت أن كل عنصر من K وحيد القوة قابل للقلب [أنظر ، من أجل أمثلة لعناصر عديمة القوة ووحيدة القوة في حلقة ، التمرين 10 من §§ 12 ، 13 و 14 والتمرين 19 من § 19 . وتعطى أيضاً ، في التحليل الرياضي ، نظرية «النشور المنتهية» أمثلة لعناصر عديمة القوة : إعتبر التوابع $f(t)$ ، لمتحول حقيقي t ، المعرفة في جوار $t = 0$. ثم ، من أجل كل $n \geq 1$ عدد طبيعي مختار ، إنتقل إلى حاصل قسمة هذه المجموعة - أنظر التمرين 7 ، جـ .) أعلاه - على التوابع التي هي $0(t^n)$ لما يؤول t نحو 0 ؛ فتحتوي طبعاً الحلقة الحاصلة على عناصر عديمة القوة مثلاً صورة التابع t في هذه الحلقة الحاصلة] .

م م 2. لتكن K حلقة . نفرض أن حقل الأعداد الكسرية $\mathbf{Q}$ حلقة جزئية من K هذا يسمح بضرب كل $x \in K$ بكل عدد كسري و ، وبصفة خاصة ، بقسمة x على كل عدد صحيح غير معدوم) .

أ) ليكن x عنصراً من K عديم القوة (التمرين 1) ، نعرف(*)

(*) إن أصل هذه التعاريف هو طبعاً نشر التوابع ،

$$e^t, \log(1+t), \cos t, \sin t$$

على شكل سلسلة صحيحة ، الذي يدرس في التحليل الرياضي . فمسألة التقارب لا تطرح لأن هذه «السلاسل» هي في الحقيقة مجاميع منتهية . ويكمن هذا التمرين في نقل علاقات معروفة جداً في التحليل الرياضي إلى إطار جبري محض ، وعلى سبيل المثال نذكر العلاقة $e^{s} \cdot e^{t} = e^{s+t}$ المعروفة جداً بين التابع الأسي المألوف وطبيعة نشره على شكل سلسلة صحيحة . ويحدث كثيراً أن نجد على هذا النحو أنداداً جبرية محضة لظواهر تدخل فيها إعتبارات التحليل الرياضي ، أي المرور إلى النهاية .

$$\exp(x) = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

أثبت معتمداً على دستور ذي الحدين أنه ، إذا كان x و y عنصرين من K عديمي القوة ويتبادلان ، لدينا :

$$\exp(x + y) = \exp(x) \cdot \exp(y)$$

ب) ليكن u عنصراً من K وحيد القوة (التمرين ١) . نعرف :

$$\log(u) = -\frac{1+u}{1} - \frac{(1-u)^2}{2} - \dots - \frac{(1-u)^n}{n} - \dots$$

اثبت أنه ، إذا كان u و v من K وحيدي القوة ويتبادلان لدينا :

$$\log(uv) = \log(u) + \log(v)$$

ج) ليكن x عنصراً من K عديم القوة . أثبت أن $\exp(x)$ وحيد القوة وأن :

$$\log(\exp(x)) = x$$

د) ليكن u عنصراً من K وحيد القوة . أثبت أن $\log(u)$ عديم القوة وأن :

$$\exp(\log(u)) = u$$

هـ) نعرف ، من أجل كل x من K عديم القوة :

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

$$\sin(x) = 1 - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

أثبت أنه ، إذا كان x و y عنصرين من K عديمي القوة ويتبادلان ، لدينا :

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cdot\cos(y) - \sin(x)\cdot\sin(y)$$
$$\sin(x+y) = \sin(x)\cdot\cos(y) + \sin(y)\cdot\cos(x)$$

أثبت أن :

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

من أجل كل عنصر من K عديم القوة، نضع طبعاً

$$\cos^2 x = \cos x \cdot \cos x.$$

$$\text{و } \sin^2(x) = \sin(x)\cdot\sin(x).$$

3. لنكن K حلقة ولنضع من أجل كل x و y من K

$$[x, y] = xy - yx$$

أثبت «متطابقة يعقوبي»

$$[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0.$$

4. نعتبر، في حلقة K، عناصر x، y، h بحيث تكون العلاقات :

$$[x, h] = 2x, [x, y] = h, [h, y] = -2y$$

محققة.

أ) أثبت العلاقتين :

$$[h, x^n] = 2n\cdot x^n \quad , \quad [h, y^n] = -2n\cdot y^n$$

ب) أثبت أن العنصر :

$$-4xy + h^2 + 2h$$

من K يتبادل مع x و y و h.

جـ) أثبت أن أصغر حلقة جزئية من K التي تحتوي على x، y و h هي مجموعة العناصر التي يمكن أن تكتب على شكل مجموع منته من الحدود من النمط :

$$a\cdot x^i y^j h^k$$

حيث i، j، k أعداد طبيعية و a عدد صحيح.

م5. ليكن p عدداً أولياً. نشير بـ $\mathbf{Z}_p$ لمجموعة العناصر $x \in \mathbf{Q}$ التي يمكن أن تكتب على شكل كسر ذي مخرج لا يقبل القسمة على p.

أ) أثبت أن $\mathbf{Z}_p$ حلقة جزئية من $\mathbf{Q}$

ب) مهما كان $x \in \mathbf{Q}$ لدينا إما $x \in \mathbf{Z}_p$ وإما $\frac{1}{x} \in \mathbf{Z}_p$

ج) إن الحلقتين الجزئيتين الوحيدتين اللتين تحتويان على $\mathbf{Z}_p$ هما $\mathbf{Z}_p$ و $\mathbf{Q}$.

د) من أجل كل مثالي I من الحلقة $\mathbf{Z}_p$، يوجد عدد طبيعي وحيد $n \geq 0$ بحيث يكون I مولداً عن p^n (معناه مكوناً من العناصر up^n مع $u \in \mathbf{Z}_p$).

هـ) من أجل كل $x \in \mathbf{Q}$ غير معدوم، يوجد $n \in \mathbf{Z}$ وحيد بحيث:

$$x = p^n \cdot u$$

حيث u عنصر من الحلقة $\mathbf{Z}_p$ قابل للقلب.

و) من أجل كل $x \in \mathbf{Q}$ غير معدوم، نضع $v_p(x) = n$ حيث n هو العدد الطبيعي الوارد في السؤال السابق، وبالإضافة إلى هذا نعرف(*).

$$v_p(0) = +\infty$$

أثبت أن:

$$v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$$

$$v_p(x+y) \geq \mathrm{Min}\,[v_p(x), v_p(y)]$$

مهما كان x، $y \in \mathbf{Q}$؛ ثم أن $\mathbf{Z}_p$ هي مجموعة العناصر $x \in \mathbf{Q}$ بحيث $v_p(x) \geq 0$.

(*) نشير بالرمز $+\infty$ إلى كائن يخضع لقاعدتي الحساب التاليتين. ولهاتين القاعدتين فقط (وإلا فليس للعمليات غير المعرفة أسفله معنى):

$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ ؛ ومن أجل كل $n \in \mathbf{Z}$: $n + (+\infty) = +\infty$

فينتج على سبيل المثال أن $\mathrm{Max}\,(2, +\infty) = +\infty$. يمكن طبعاً ألا نلتجئ، في تعريف v_p، إلى الرمز $+\infty$: يكفي ألا نعطي أي معنى لـ $v_p(0)$، ثم نذكر العلاقات التي يجب أن نبرهن بطريقة لا تؤدي أبداً للكتابة. هذه الطريقة تعقد الموقف كثيراً.

ز) أثبت أن تقاطع جميع الحلقات الجزئية $\mathbf{Z}_p$ من $\mathbf{Q}$ الموافقة لجميع الأعداد الأولية p هو حلقة الأعداد الصحيحة $\mathbf{Z}$.

م6. ليكن K حقلاً تبديلياً و A حلقة جزئية من K . نقول عن A إنها «حلقة تقييم» في K إذا كان $A \neq K$ وإذا كان لدينا :

$x \ni A$ أو $x^{-1} \ni A$ مهما كان $x \ni K$ غير معدوم برهن عندئذٍ أن العناصر غير القابلة للقلب من الحلقة A تشكل مثالياً m من A ، وأن كل مثالي من A ، مختلف عن A بأكمله ، محتوى في m [حيث أن ، وفقاً لاصطلاح التمرين 7 ، د .) الوارد أسفله ، m هو المثالي الأعظمي الوحيد من A] .

نسمي «تقييماً منفصلاً» على K كل تابع v معرف على K ويأخذ قيمه في $\mathbf{Z} \cup \{+\infty\}$ ويتمتع بالخواص التالية :

$v(0) = +\infty$ ؛ $\mathbf{Z} \ni v(x)$ من أجل $x \neq 0$ ؛

$v(xy) = v(x) + v(y)$ مهما كان x ، y من K :

$v(x+y) \geq \text{Min}\,[v(x), v(y)]$ مهما كان x ، y من K .

نفرض v غير تافه (معناه لا تقتصر $v(K)$ على 0 و $+\infty$) . أثبت أن المجموعة A المكونة من العناصر $x \ni K$ بحيث $v(x) \geq 0$ هي حلقة تقييم في K . وان المثالى الأعظمي m من A هو مجموعة العناصر $x \ni K$ بحيث $v(x) > 0$. لنختر عنصراً $\pi \ni m$ بحيث يكون $v(\pi)$ أصغرياً ؛ أثبت أن $m = A\pi$ ثم أن كل مثالي من A هو من الشكل $A\pi^n$ ، من أجل $n \geq 0$ طبيعي .

أثبت أن حلقات التقييم الوحيدة في $\mathbf{Q}$ هي الحلقات $\mathbf{Z}_p$ الواردة في التمرين السـابق . أوجد جميع التقييمات المنفصلة على $\mathbf{Q}$.

م7. ليكن I مثالياً ثنائي الطرف من حلقة K ؛ نرمز بـ :

$$x \equiv y \pmod{I}$$

للعلاقة $x - y \ni I$ (توافق وفق I)

أ) أثبت أنها علاقة تكافؤ على المجموعة K . ماذا يحدث إذا أخذنا $K = \mathbf{Z}$ و $I = p\mathbf{Z}$؟

ب) أثبت أن العلاقتين :

$$x' \equiv y' \pmod I \quad \text{و} \quad x'' \equiv y'' \pmod I$$

تستلزمان العلاقتين :

$$x' + x'' \equiv y' + y'' \pmod I \quad \text{و} \quad x' x'' \equiv y' y'' \pmod I$$

ج) نرمز بِـK/I للمجموعة الحاصلة عن قسمة K على علاقة التكافؤ السابقة، وليكن θ التطبيق القانوني لِـK على K/I ؛

إثبت أنها توجد على المجموعة K/I بنية حلقة وبنية حلقة وحيدة بحيث يكون التطبيق θ تماثلاً (قلد التشييد المعطى في حالة الحلقات $\mathbf{Z}/_p\mathbf{Z}$) . نقول عن K/I إنها «الحلقة الحاصلة» عن قسمة K على المثالي الثنائي الطرف I .

د) نفرض أن K حلقة تبديلية . نقول عن مثالي I من K أنه «أعظمي» إذا كان $I \neq K$ وإذا كان المثاليان الوحيدان اللذان يحتويان على I هما I و K . أثبت أنه، حتى يكون I أعظمياً، يلزم ويكفي أن تكون الحلقة الحاصلة K/I حقلاً (لاحظ أن الحقل لا يحتوي على أي مثالي آخر غير $\{0\}$ والحقل نفسه، (والعكس بالعكس) . ما هي المثاليات الأعظمية في الحلقة $\mathbf{Z}$؟

هـ) نقول عن مثالي من حلقة تبديلية K إنه «أولي» إذا كان $I \neq K$ وكانت العلاقة

$$xy \in I$$

تستلزم أن $x \in I$ أو $y \in I$ ، من أجل كل x و y من K.

أثبت أن هذه الشرط يعني أن الحلقة الحاصلة K/I تامة . ماهي المثاليات الأولية من الحلقة $\mathbf{Z}$؟

و) أثبت أن كل مثالي أعظمي أولي [ملحوظة - العكس غير صحيح إلا من أجل حلقات من أنماط خاصة جداً] .

ز) ليكن K حقلاً تبديلياً و A حلقة جزئية من K ؛ نفرض أن كل $x \in K$ يمكن أن يكتب على الشكل u/v مع u ، $v \in A$ و $v \neq 0$ (هذا يعني أن K هو حقل كسور A ؛ أنظر 29 §) . ليكن p(*) مثالياً أولياً من A ، نرمز بـ A_p (الحلقة المحلية لـ p) لمجموعة عناصر K التي يمكن أن تكتب على الشكل :

u/v مع u ، $v \in A$ و $v \notin p$.

أثبت أن A_p حلقة جزئية من K وأنها تحتوي على مثالي أعظمي وحيد . ثم أنه ، إذا أرفقنا كل مثالي $I \neq A_p$ من الحلقة A_p بتقاطعه $I \cap A$ مع A ، فهذا يعرّف تقابلا بين مجموعة المثاليات $I \neq A_p$ من A_p ومجموعة المثاليات من A المحتواة في p .

8. لتكن A و B حلقتين . أثبت أننا نحصل على حلقة (تركيب مباشر لـ A و B) بتزويد المجموعة $A \times B$ بقانوني التشكيل المعطيين بالدستورين :

$$(x', y') + (x''y'') =$$
$$= (x' + x'', y' + y''); (x', y') \cdot (x'', y'') = (x' x'', y' y'')$$

هل يمكن أن يكون التركيب المباشر $A \times B$ حلقة تامة؟

م 9. ليكن m و n عددين صحيحين أوليين فيما بينهما .

أ) أثبت أنه ، مهما كان a ، $b \in \mathbf{Z}$ ، يوجد $x \in \mathbf{Z}$ بحيث :

$$x \equiv a \pmod m \quad \text{و} \quad x \equiv b \pmod n$$

وأن صف x وفق mn معرف تماماً بصف a وفق m وصف b وفق n . مثال : أوجد جميع حلول جملة التوافقات :

$$x \equiv 4 \pmod 7 \quad \text{و} \quad x \equiv 9 \pmod{11}$$

ب) نعتبر الحلقات $A = \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$ و $B = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ و $C = \mathbf{Z}/mn\mathbf{Z}$.

(*) التقليد الجاري هو أن يرمز للمثاليات بحروف قوطية ، لكننا لم نحترم هذا في نص البند 8 وهذا لكي لا يحرج المتدوزون .

شيد معتمداً على السؤال السابق، تشاكلاً بين التركيب المباشر (التمرين 8) والحلقة C . (يمكن إستعمال النظرية 3 من 4 §) .

ج) لتكن q_1 ، ... ، q_h أعداداً صحيحة أولية فيما بينها . أثبت بالتدرج على h أنه، مهما كانت الأعداد a_1 ، ... ، $a_h \in \mathbf{Z}$ ، يوجد عدد $x \in \mathbf{Z}$ يحقق الـ h علاقة التالية :

$$x = a_i (\text{mod } q_i)\ (1 \leq i \leq h)$$

(تعرف هذه النتيجة «بالنظرية الصينية»، نظراً إلى أن الصينيين يستعملون حالات خاصة منها لإختيار أوقات أحداث مرتبطة ببعض الظواهر الفلكية أو بظواهر أخرى) .

د) ليكن :

$$n = p_1^{r_1} \dots p_h^{r_h}$$

تحليل العدد الطبيعي n إلى عناصر أولية . أثبت أن الحلقة $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ متشاكلة مع التركيب المباشر لِـ h حلقة $\mathbf{Z}/q_i\mathbf{Z}$ حيث :

$q_i = p_i^{r_i}$ من أجل $1 \leq i \leq h$.

هـ) لتكن q_1 ، ... ، q_h أعداداً صحيحة كيفية، حتى يمكن حل جملة التوافقات $x \equiv a_i (\text{mod } q_i) (1 \leq i \leq h)$

يلزم ويكفي أن يكون لدينا :

$$a_i \equiv a_j (\text{mod } d_{ij})\ (1 \leq i < j \leq h)$$

حيث d_{ij} يشير إلى أعظم قاسم مشترك لِـ q_i ، q_j .

10. ليكن I و J مثاليين من حلقة تبديلية K . نرمز بِـ $I + J$ (مجموع المثاليين I و J) لمجموعة عناصر K التي تكتب على الشكل $x + y$ مع $x \in I$ و $y \in J$ ، ونرمز بِـ IJ (جداء المثاليين I و J) لمجموعة العناصر $z \in K$ التي تتمتع بالخاصية التالية : يوجد عدد طبيعي $n \geq 1$ وعناصر x_1 ، ... ، x_n من I وعناصر y_1 ، ... ، y_n من J بحيث :

$$z = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n$$

أ) أثبت أن $I + J$ هو أصغر مثالي من K يحتوي على I و J . اثبت أيضاً أن IJ مثالي من K ، محتوى في $I \cap J$. اثبت العلاقات :

$$I + J = J + I, \qquad I + (I' + I'') = (I + I') + I''$$
$$IJ = JI, \qquad I(I'I'') = (II')I'', I(J' + J'') = IJ' + IJ''$$

حيث تشير I ، I' ، . . . لمثاليات من K . ما تفسير $I + J$ و IJ و IJ في حالة I و J رئيسيان؟

ب) نقول عن مثاليين I و J من K أنهما «غريبان» إذا كان $I + J = K$ ما معنى هذه الخاصية لما $K = \mathbf{Z}$ ؟ أثبت أنه ، إذا كان I و J غريبين ، لدينا : $I \cap J = IJ$.

جـ) حتى يكون المثاليان I و J من K غريبين ، يلزم ويكفي أن يوجد a ، b من K و $x \in K$ بحيث :

$$x \equiv a \pmod I \quad \text{و} \quad x \equiv b \pmod J$$

م . إستنتج أن الحلقة الحاصلة K/IJ (التمرين 7) متشاكلة من التركيب المباشر (التمرين 8) للحلقتين K/I و K/J .

د) لتكن I و J_1 ، ... ، J_r مثاليات من K ؛ نفرض أن I و J_k غريبان من أجل $1 \leq k \leq r$. أثبت أن I غريب مع الجداء $J_1 \ldots J_r$.

هـ) لتكن J_1 ، ... ، J_r مثاليات غريبة مثنى مثنى . أثبت أن :

$$J_1 \ldots J_r = J_1 \cap \ldots \cap J_r$$

و) لتكن J_1 ، ... ، J_n مثاليات غريبة مثنى مثنى . أثبت أنه ، مهما كان a_1 ، ... ، a_r من K ، يمكن إيجاد عنصر $x \in K$ بحيث يكون لدينا :

$$x \equiv a_k \pmod{J_k} \quad (1 \leq k \leq r)$$

ز) إن كل مثاليين أعظميين (التمرين 7 ، د .)) من K ومختلفين غريبان .

م 11. لتكن I_1 ، ... ، I_r مثاليات من حلقة تبديلية K . إذا إحتوى مثالي (أولي التمرين 7 ، هـ.) ما من K على الجداء $I_1 \dots I_r$ فهو يحتوي على الأقل على احد المثاليات I_1 ، ... ، I_r .

ليكن مثالي I غير أولي من K . أثبت وجود مثاليين J' و J'' من K يتمتعان بالخاصية التالية : يحتوي J' و J'' على I ويختلفان عن I ، ويحتوي I على المثالي للجداء $J'J''$.

12. ليكن I مثالياً معطى من حلقة تبديلية K ، نسمي «جذر» I مجموعة العناصر $K \ni x$ بحيث :

$$x^n \in I$$

من أجل عدد طبيعي $n \geq 1$ على الأقل . نرمز في هذا التمرين إلى جذر مثالي ما I بالتأشيرة :

$$\sqrt{I}$$

(والتي هي أسوأ ما تكون كما ستبينه الدساتير الآتية . . .) .

أ) أثبت أن جذر مثالي هو أيضاً مثالي . ماذا يحدث إذا كان $I = \{0\}$ ؟ ما هو جذر مثالي أولي من K (التمرين 7 ، ه.) ؟

ب) أثبت الدساتير التالية ، حيث I و J مثاليان ما من الحلقة K

$$\sqrt{I \cdot J} = \sqrt{I \cap J} = \sqrt{I} \cap \sqrt{J}$$

$$\sqrt{I + J} = \sqrt{\sqrt{I} + \sqrt{J}}$$

$$\sqrt{\sqrt{I}} = \sqrt{I}$$

ج) عين تعيناً تاماً جذر مثالي ما من حلقة الأعداد الصحيحة Z .

13. نقول عن مثالي ما I من حلقة تبديلية إنه «إبتدائي» إذا كان $I \neq K$ ، ومهما كان x و y من K بحيث :

$$I \not\ni x \quad \text{و} \quad xy \in I$$

يوجد عدد طبيعي $n \geq 1$ بحيث :

$y^n \in I$.

أثبت أن جذر مثالي إبتدائي هو مثالي أولي .

13. حتى يكون I (الذي يختلف عن K فرضاً) إبتدائياً ، يلزم ويكفي أن يكون ، في الحلقة الخاصلة K/I ، كل قاسم للصفر عديم القوة . ما هي المثاليات الإبتدائية من الحلقة Z ؟

14. ليكن m مثالياً أعظمياً من حلقة تبديلية K . أثبت أن قوى m

$$m^n = \underbrace{M \times \ldots M}_{n \text{ مرة}}$$

هي مثاليات إبتدائية وجذورها تساوي m .

15. ليكن m مثالياً أعظمياً من حلقة تبديلية K ، و a مثالياً من K محتوياً في m . نفترض أن كل عنصر من m له قوة في a .

أثبت أن a إبتدائي وأن جذره هو m .

16. حتى يكون عنصر ما من حلقة تبديلية K قابلاً للقلب ، يلزم ويكفي أن لا ينتمي إلى أي مثالي من K ما عدا K نفسه .

نحن نقبل نظرية «كرول» التالية : لتكن K حلقة تبديلية(*) . إن كل

(*) تمتد في الحقيقة نظرية كرول إلى كل حلقة K (تبديلية أم لا) وهذا كما يلي . نقول عن مثالي I من اليسار (من اليمين ، من الطرفين على التوالي) من حلقة ما K ، إنه أعظمي إذا كان $K \neq I$ وإذا لم يكن محتوى في أي مثالي آخر من اليسار (من اليمين ، من الطرفين على التوالي) من K ما عدا K نفسه . تنص نظرية كرول هو أن كل مثالي من اليسار (من اليمين ، من الطرفين على التوالي) من K محتوى على الأقل في مثالي من اليسار (من اليمين ، من الطرفين على التوالي) أعظمي من K .

إذا كان $K = Z$ تعني نظرية كرول أن لكل عدد طبيعي $n \geq 2$ قاسماً أولياً على الأقل . فيمكن أن نعتبر إذن نظرية كرول كتوسيع هذه النتيجة إلى جميع الحلقات بدون إستثناء ؛ وبهذه الصفة . ورغم بساطة نص هذه النظرية فهي إحدى النتائج المفيدة كثيراً في الجبر بأكمله . ولقد إستعملت كذلك منذ حوالي عشرين سنة (من طرف جلفاند) في برهنة نظريات صعبة في التحليل الرياضي وهذا باعتبار حلقات عناصرها توابع لمتحول أو لعدة متحولات حقيقية وتحقق بعض الشروط .

إن البرهان العام لنظرية كرول سهل شرط أن نعرف ما فيه الكفاية نظرية المجموعات والأعداد اللانهائية (وهذه بالضبط إحدى النقط حيث نرى النظرية «الكبرى» للأعداد اللانهائية تستخدم في

مثالي من K ، مختلف عن K ، محتوى في مثالي أعظمي من K على الأقل (نذكر ، التمرين 7 ، (د .) ، أننا نسمي مثالياً أعظمياً من K كل مثالي I بحيث $K \neq I$ ولا يوجد مثالي من K يحتوي على I ما عدا I نفسه و K) .

أثبت أنه ، حتى يكون عنصر من K قابلاً للقلب ، يلزم ويكفي أن لا ينتمي إلى أي مثالي أعظمي من K .

17. ليكن I تقاطع جميع المثاليات الأعظمية من حلقة تبديلية K . أثبت أن العنصر a من K ينتمي إلى I إذا وفقط إذا كان العنصر $1 - ax$ قابلاً للقلب من أجل كل $x \in K$ (إستعمل التمرين السابق) .

[يمكن توسيع هذه النتيجة (جكوبسن) إلى حلقات غير تبديلية في مثل هذه الحلقات ، يساوي تقاطع جميع المثاليات من اليسار الأعظمية تقاطع جميع المثاليات من اليمين الأعظمية ، ويتميز عناصر هذا التقاطع بأن ، إذا كان a عنصراً من التقاطع ، يكون العنصر $1 - xay$ قابلاً للقلب مهما كانا x و y من K. فبراهين هذه النتائج بسيطة نسبياً]

م 18. نرمز بـ F_p للحقل Z/pZ من أجل p أولي .

نزود المجموعة $F_{11} \times F_{11}$ بقانوني التشكيل المعطيين بالمساواتين

$$(u, v) + (x, y) = (u + x, v + y)$$
$$(u, v) \cdot (x, y) = (ux + 7vy, uy + vx)$$

(حيث يشير طبعاً 7 إلى صف العدد الطبيعي 7 وفق 11) . أثبت أننا نحصل بهذه الطريقة على حقل تبديلي ذي 121 عنصر

برهنة نتائج «ملموسة» لكن براهينها ليست سهلة) . نرى في المسألة 11 برهاناً بسيطاً [illegible] في حالة الحلقات النوترية (لكنه يبدو أن تكون الحلقات [illegible] في التحضير [illegible]) . [illegible] البرهان العام هي . بما أن الحلقة K لا تحتوي على أي مثالي أعظمي ، يمكن [illegible] في K [illegible] متزايدة غير منتهية وحتى «لا منتهية» من مثاليات (وبعبارة أخرى ، يمكن [illegible] كل عدد ترتيبي [illegible] مثالي I بحيث يكون [illegible] من أجل [illegible] [illegible] . والصعوبة كل الصعوبة هي أن [illegible] إلى [illegible] الأعداد الطبيعية) . [illegible] مع النتيجة القائلة أنه لا يوجد تطبيق متباين لمجموعة (هنا) جميع الأعداد الترتيبية في مجموعة ما (في هذه الحالة ، مجموعة مثاليات K) . والسبب هو أن الأعداد الترتيبية لا تشكل مجموعة

19. أثبت أنه ، إذا كان p عدداً أولياً ، يكون معامل ثنائي الحد $\binom{n}{p}$ من مضاعفات p من أجل $1 \leq n \leq p - 1$. إستنتج أنه ، من أجل p عدد أولي فردي ، لدينا :

$$(1 + p)^{p^k} \equiv 1 + p^{k+1} \pmod{p^{k+2}}$$

من أجل كل عدد طبيعي k (إستدل بالتدريج) .

20. لنضع $r = \sqrt[3]{2}$. أثبت أن مجموعة الأعداد من الشكل :

$$a + br + cr^2$$

حيث a ، b ، c أعداد صحيحة كيفية ، حقل جزئي من حقل الأعداد الحقيقية $\mathbf{R}$.

(وسيعطي أيضاً هذا التمرين فرصة للقارئ المبتدئ ليبرهن أن العدد 2 ليس مكعباً لعدد صحيح) .

1. أ) أثبت أن كل عدد عقدي $d \neq 0$ يملك في $\mathbf{C}$ جذرين تربيعيين بالضبط (ابحث عن طويلتيهما وَ عمدتيهما بدلالة طويلة وعمدة d) .

ب) استنتج أن لكل معادلة من الدرجة الثانية :

$$az^2 + bz + c = 0$$

حيث a ، b ، c أعداد عقدية ، جذراً على الأقل في $\mathbf{C}$ ، وجذرين إذا كان :

$$b^2 - 4ac \neq 0$$

جـ) حل ، في $\mathbf{C}$ ، المعادلات :

$$z^2 + (5 - 2i)z + 5 - 5i = 0$$

$$z^2 + (1 - 2i)z - 2i = 0$$

$$z^4 - 30z^2 + 289 = 0$$

2. أوجد الجزئين الحقيقي وَ والتخيلي للأعداد العقدية التالية :

$$\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2+i)^2}; \ \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}; \ \left(-\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}\right)^3; \ \sqrt[4]{2 - i\sqrt{12}};$$

$$(az^2 + bz)(bz^2 + az)$$

حيث :

$$z = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

3. احسب طويلة وعمدة الأعداد العقدية التالية :

$$-1+i,\ -1-i\sqrt{3};\ 2+\sqrt{3}+i;\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20};\ (1+\cos\theta+i\sin\theta)^n$$

4. أوجد الحلول العقدية للمعادلات التالية (إستعمل دستور موافر) :

$$z^3+1=0;\ z^5=1,\ z^6+27=0;\ z^8=\frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$$

5. أ) أحسب

$$\cos 5t,\ \cos 8t,\ \sin 6t,\ \sin 9t,\ tg\ 6t$$

بدلالة الخطوط المثلثية للزاوية t .

ب) احسب :

$$\sin^3 t,\ \sin^4 t,\ \cos^5 t,\ \cos^6 t$$

باستخدام الخطوط المثلثية للمضاعفات الصحيحة للزاوية t .

6. ليكن u و v عددين عقديين . اثبت العلاقة :

$$|u+v|^2+|u-v|^2=2\left[|u|^2+|v|^2\right]$$

ماهو تمثيلها الهندسي؟

م7. برهن العلاقات التالية :

$$2^{2n}\cos^{2n} t=2\cos 2nt+2\binom{2n}{1}\cos(2n-2)t+\ldots+2\binom{2n}{n-1}\cos 2t+\binom{2n}{n},$$

$$2^{2n}\cos^{2n+1} t=\cos(2n+1)t+\binom{2n+1}{1}\cos(2n-1)t+\ldots+\binom{2n+1}{n}\cos t,$$

$$2^{2n}\sin^{2n} t=2\sum_{k=0}^{k=n-1}(-1)^{n+k}\binom{k}{2n}\cos 2(n-k)t+\binom{n}{2n},$$

$$2^{2n}\sin^{2n+1} t=\sum_{k=0}^{k=n}(-1)^{n+k}\binom{k}{2n+1}\sin(2n-2k+1)t,$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{3}\binom{3}{n} + \frac{1}{9}\binom{5}{n} - \frac{1}{27}\binom{7}{n} + \ldots = \frac{2^n}{3^{\frac{n-1}{2}}} \sin \frac{n\pi}{6} .$$

$$\cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11} = \frac{1}{2} .$$

8. لتكن U مجموعة الأعداد العقدية z بحيث $|z| = 1$. اثبت أنها زمرة جزئية من الزمرة الضربية $\mathbf{C}^*$ للأعداد العقدية غير المعدومة. شيد تشاكلاً بين الزمرتين $U \times \mathbf{R}^*_+$ و $\mathbf{C}^*$. اثبت أن U متشاكل مع زمرة الدورانات حول نقطة من المستوى.

9. نسمي «نصف مستوى بوانكارية» المجموعة P المكونة من الأعداد العقدية z بحيث:

$$\operatorname{Im}(z) > 0$$

ونسمي «قرص الوحدة» المجموعة D للأعداد العقدية z بحيث:

$$|z| < 1$$

أثبت أن: $\quad z \mapsto \dfrac{z - i}{z + i}$

تطبيق تقابلي بين P و D (ارمز بـ A و B للنقطتين ذات اللاحقتين i و $-i$، وبـ M للنقطة ذات اللاحقة z، ثم ترجم طويلة وعمدة العدد $z - \frac{i}{z} + i$ بإستعمال عناصر المثلث MAB).

10. لنرمز بـ a، b، c، d لأعداد حقيقية بحيث $ad - bc = 1$.

أ) أثبت أنه، من أجل كل عدد عقدي z غير حقيقي، لدينا:

$$\operatorname{Im}\left(\frac{az + b}{cz + d}\right) = \frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz + d|^2}$$

ب) ليكن P نصف مستوى بوانكارية (التمرين 9). أثبت وجود تبديل s لـ P بحيث:

$$s(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

من أجل كل $z \in P$ ، وأن التبادیل المحصل علیها بهذا النحو (بتغییر الأعداد a ، b ، c ، d) تشكل زمرة من تحویلات المجموعة P .

جـ) أثبت أن التطبیق s المعرف في السؤال ب.) یمكن أن یتحلل إلى جداء تحویلات تنتمي إلا أحد الأنماط الثلاثة التالیة :

$z \mapsto 1/z$ ؛ $z \mapsto vz$ (مع v موجب تماماً) ؛ $z \mapsto z + u$ (u حقیقي) .

مثّل هندسیاً هذه التطبیقات .

د) ما هو الشكل الهندسي الذي یرسمه $s(z)$ لما ترسم النقطة ذات اللاحقة z إما دائرة محتواة في P ، وإما نصف دائرة محتواة في P وممركزة على المحور الحقیقي ، وإما نصف مستقیم محتوي في P ومحدود بالمحور الحقیقي وعمودي علیه؟

م م11. لتكن G مجموعة تبادیل نصف مستوى بوانكاریة المعطاة بـ :

$$s(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

حیث a ، b ، c ، d أعداد صحیحة بحیث $ad - bc = 1$ (انظر التمرین 10) .

أ) أثبت أن G زمرة لتبادیل P (تدعى «بالزمرة المقیاسیة الحسابیة») وأنها تحتوي على التطبیقین u و v المعطیین بـ :

$$v(z) = -1/z \text{ ، } u(z) = z + 1.$$

نحن ننوي أن نبرهن أن G مولد عن u و v . لنرمز بـ G_0 للزمرة الجزئیة المولدة عن u و v .

ب) لتكن ، من أجل كل $z \in P$ ، I_z مجموعة الأعداد $y > 0$ التي تتمتع بالخاصیة : یوجد تبدیل $s \in G_0$ بحیث $y = \text{Im}(s(z))$. باستخدام السؤال أ.) من التمرین 10 ، أثبت أنه ، مهما كان $m > 0$ ، یكون عدد عناصر I_z بحیث $y > m$ عدداً منتهیاً .

ج) أثبت، من أجل كل $z \in P$، وجود تبديل $s \in G_0$ بحيث يحقق العدد $z_0 = s(z)$:

$$\text{Im}\left(t(z_0)\right) \leq \text{Im}(z_0) \text{ من أجل كل } t \in G_0$$

أثبت أن لدينا العلاقات :

$$-\frac{1}{2} \leq Re(z_0) \leq \frac{1}{2} \text{ ، } |z_0| \geq 1$$

د) ليكن D الجزء من P المعرف بالمتراجحات السابقة (بحيث يلتقي مدار كل عنصر من P بـ G_0 مع D). لتكن z نقطة «داخلية» من D، معناه

$$-\frac{1}{2} < Re(z) < +\frac{1}{2} \text{ ، } |z| < 1$$

أثبت أن العنصر الوحيد $s \in G$ بحيث $s(z) \in D$ هو العنصر الحيادي. من أجل كل $t \in G$، أثبت وجود $t' \in G_0$ بحيث $t'\left(t(z)\right) \in D$.

استنتج أن $t_0 \in G_0$، وإذن $G = G_0$ كما ورد أعلاه.

هـ) من أجل كل $s \in G$ أثبت أن المجموعة $s(G)$ هي مثلث (هكذا) محدود بأنصاف دائرات عمودية على المحور الحقيقي (يمكن أن تنحل بعض أنصاف الدائرات هذه إلى أنصاف المستقيمات)، وأن نصف المستوى P يساوي إتحاد المجموعات $s(D)$ مع $s \in G$. وأنه لا يمكن لساحتين $s(D)$ و $t(D)$ مختلفتين (معناه $s \neq t$) أن يشاركا الا في أحد اضلاعهما.

باستعمال المسطرة والبركار، ارسم بأكبر دقة ممكنة الشكل المكون بهذا «التجليط» لنصف المستوى P - إنطلق من D، ثم شيد المجموعات $u^n(D)$، ثم المجموعات $vu^n(D)$ ثم $u^p vu^n(D)$، ... الخ.

[إذا تتبعنا التشييد إلى حد بعيد بكفاية، نحصل على شكل معقد للغاية. وكان هذا الشكل نقطة إنطلاق أبحاث ف. كلين وهـ. بوانكارية في نظرية «التوابع المتطابقة ذاتياً».]

12. لتكن K الحلقة الجزئية من $\mathbf{C}$ المكونة من الأعداد ذات الشكل $x + iy$ مع x ، $y \in \mathbf{Z}$ (تدعى بأعداد غوس الصحيحة) .

أ) ليكن u و $v \in K$ مع $v \neq 0$ ، نضع :

$$u/v = x + iy$$

مع x و y عددين كسريين ، ثم نعين عددين صحيحين m و n بحيث :

$$|x - m| \leq \frac{1}{2}; \quad |y - n| \leq \frac{1}{2} ،$$

وأخيراً نضع $r = u - qv$ ، $q = m + in$

أثبت أن $N(r) < N(v)$ أو إن شِئت ، $|r| < |v|$.

ب) استنتج من هذا أن كل مثالي من الحلقة K رئيسي (قلِّد الإستدلال المستعمل في المثالين 8 من § 7) .

13. من أجل كل عدد أولي p نرمز بِـ F_p للحقل $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$. اوجد العناصر $d \in F_p$ بحيث تكون الحلقة $F_p[\sqrt{d}]$ حقلاً من أجل :

$$p = 2, 3, 5, 7, 11$$

أترى علاقة مع التمرين 11 من § 8؟

14. ليكن K حقلاً تبديلياً ، u و v عنصرين من K غير مربعين في K . حتى يوجد تشاكل f بين الحقل $K[\sqrt{u}]$ ، والحقل $K[\sqrt{v}]$ بحيث $f(x) = x$ من أجل كل $x \in K$ ، يلزم ويكفي أن يكون u/v مربعاً لعنصر من K .

تطبيق : بإعتبار الحقول المشيدة في التمرين 13 ، أثبت أن كل حقلين منها متشاكلان بمجرد أن يكون لهما نفس عدد العناصر .

(هذه نتيجة خاصة من النتيجة العامة التي تقول إنه إذا كان أن الحقلين منتهيين نفس عدد العناصر فهما متشاكلان) .

م 15. ليكن K حقلاً تبديلياً و d عنصراً من K غير مربع في K . لنفرض أن العنصر $1 + 1 = 2$ من K غير معدوم (هذا يستبعد مثلاً الحقل $\mathbf{Z}/2\,\mathbf{Z}$) .

أثبت ، أنه حتى يكون العنصر x من الحقل $K[\sqrt{d}]$ وليس من K ، مربعاً في $K[\sqrt{d}]$ ، يلزم ويكفي أن يكون $N(x)$ مربعاً في K .

تطبيق : لنأخذ $K = \mathbf{Z}/11\,\mathbf{Z}$ و $d = 7$. أوجد جميع العناصر $u + v\sqrt{d}$ $(K \ni v, u)$ التي هي مربعات في $K[\sqrt{d}]$ (يمكن نقل ، في جدول ذي مدخلين ، قيم $u^2 - 7v^2$ لما u و v يتغيران في K) .

استنتج من هذا أمثلة لحقول منتهية ذات 14 641 عنصراً . . . ثم تأكد من أن جميع الحقول المحصل عليها متشاكلة مثنى مثنى .

م 16. ليكن K حقلاً تبديلياً حيث $1 -$ مربع . ليكن d عنصراً من K غير مربع في K . أثبت أن $\sqrt{d}$ غير مربع في $K[\sqrt{d}]$.

تطبيق : شيد حقلاً ذا 17^4 عنصراً .

م م 17. ليكن K حقلاً منتهياً ذا q عنصراً ؛ نفرض q فردياً .

أ) أثبت أن العنصرين 1 و $1 -$ مختلفان (لاحظ أنه في الحالة العكسية يكون لدينا $2x = qx = 0$ من أجل كل $K \ni x$ ، ثم q و 2 أوليان فيما بينهما) .

ب) أثبت أن $x \mapsto x^2$ تماثل للزمرة الضربية K^* المكونة من عناصر K غير المعدومة في K نفسه ، وأن نواته تتكون من 1 و $1 -$. إستنتج أن المربعات غير المعدومة من K تشكل زمرة جزئية H ذات :

$$\frac{q-1}{2}.$$

عنصراً من K^* (استخدم التمرين 21 من § 7) وأن الزمرة الحاصلة K^*/H تحتوي على عنصرين فقط .

ج) أثبت، من أجل كل $x \in K^*$ أن لدينا:

$$x^{\frac{q-1}{2}} = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } x \text{ مربعاً} \\ -1 & \text{إذا لم يكن } x \text{ مربعاً} \end{cases}$$

د) ليكن p عدداً أولياً فردياً. نقول عن عدد طبيعي n لا يقبل القسمة بِـp، إنه باق تربيعي وفق p إذا وجد عنصر $x \in \mathbf{Z}$ بحيث:

$$x^2 \equiv n \pmod p.$$

أثبت أن البواقي التربيعية تتوزع على $\frac{p-1}{2}$ صفاً وفق p، وأنه، من أجل كل عدد طبيعي n لا يقبل القسمة على p لدينا:

$$n^{\frac{p-1}{2}} \equiv \begin{cases} +1 \pmod p & \text{إذا كان } n \text{ باقياً تربيعياً وفق } p \\ -1 \pmod p & \text{إذا لم يكن } n \text{ باقياً تربيعياً وفق } p \end{cases}$$

(معيار أويلر) أثبت أن -1 هو باق تربيعي وفق p إذا وفقط إذا كان:

$$p \equiv 1 \pmod 4.$$

[إن احدى نقط إنطلاق الحساب والجبر «العصريين» بأكملهما، هي دراسة نظرية البواقي التربيعية في القرن الثامن عشر وفي بداية القرن التاسع عشر. فأشهر نتيجة في هذا الدرب هي «قانون المبادلة التربيعية» الذي خمنه أويلر وبرهن من طرف غوس وهو يبلغ من العمر 19 سنة – بداية حسنة! يتطلب نص هذا القانون إدخال «رمز لجندر».

$$\left(\frac{n}{p}\right) = \begin{cases} +1 & \text{إذا كان } n \text{ باقي تربيعي وفق } p \\ -1 & \text{وإلا.} \end{cases}$$

إن قانون المبادلة هو أنه إذا كان p و q عددين أوليين فرديين ومختلفين لدينا:

$$\left(\frac{p}{q}\right) \cdot \left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2} \cdot \frac{q-1}{2}}$$

من أجل برهان هذه النتيجة وبصفة عامة من أجل كل ما يخص الحساب الابتدائي، يمكنك مثلا أن ترجع إلى كتاب ج. هـ. هاردي و أ.م. فرايت: «مدخل إلى نظرية الأعداد» (أكسفورد 1938).

لقد حاول الرياضيون - بعد غوس - أن يعمموا قانون المبادلة التربيعية ليشمل حلقات الأعداد الصحيحة الجبرية (التمرين 48، 34 §)، وهذا أصعب بكثير من حالة الأعداد الصحيحة التي عالجها غوس. لقد حصل ما بين 1920-1925 طاكاجي وأرتين وهاس على نتائج كاملة وهي نتائج خمنها من قبل هيلبرت. وبعد حوالي عشر سنوات تحسنت كثيراً النظرية من طرف شفالى، وهي حتى الآن موضوع أبحاث نشيطة جدا.]

1. أثبت، في $\mathbf{R}^3$، أن الشعاع $x = (6, 2, -7)$ عبارة خطية في الأشعة:

$$a = (2, 1, -3), \quad b = (3, 2, -5), \quad c = (1, -1, 1);$$

هل تشكل الأشعة a، b، c أساساً لـ $\mathbf{R}^3$؟

نفس السؤالان في $\mathbf{R}^4$ من أجل $x = (7, 14, -1, 2)$ و:

$$a = (1, 2, -1, -2), \ b = (2, 3, 0, -1), \ c = (1, 2, 1, 3), \ d = (1, 3, -1, 0)$$

أثبت أن الأشعة a، b، c تكون أساساً في $\mathbf{R}^3$، ثم أوجد إحداثيات الشعاع x بالنسبة لهذا الأساس في الحالتين التاليتين:

$$a = (1, 1, 1), \ b = (1, 1, 2), \ c = (1, 2, 3), \ x = (6, 9, 14),$$
$$a = (2, 1, -3), \ b = (3, 2, -5), \ c = (1, -1, 1), \ x = (6, 2, -7)$$

نفس السؤال في $\mathbf{R}^4$ من أجل الأشعة:

$$a = (1, 2, -1, -2), b = (2, 3, 0, -1), c = (1, 2, 1, 4), d = (1, 3, -1, 0)$$

و: $x = (7, 14, -1, 2)$.

2. حتى يشكل الشعاعان (a, b) و (c, d) من $\mathbf{R}^2$ أساساً في $\mathbf{R}^2$ يلزم ويكفي أن يكون: $ad - bc \neq 0$.

3. ليكن M الفضاء الشعاعي الحقيقي المكون من أشعة ذات بداية معطاة 0 في الفضاء المألوف. لتكن $M' \subset M$ مجموعة الأشعة ذات البداية 0 وذات نهاية واقعة في مستو معطى من الفضاء. هل M' فضاء جزئي من M؟

4. لتكن K حلقة . نعتبر في K^n المجموعة M المكونة من الأشعة $(x_1, \dots, x_n)$ التي تحقق العلاقة :

$$x_1 + \dots + x_n = 0$$

هل هي مقياس جزئي من K^n ؟ نفس السؤال بتعويض العلاقة السابقة بـ :

$$x_1 + \dots + x_n = 1$$

5. لنعتبر في C^n الأشعة :

$$x_k = (\xi_{k1} \dots, \xi_{kn}) \quad (1 \le k \le r)$$

ذات المركبات التي تحقق المتراجحات :

$$|\xi_{kk}| > \sum_{\substack{1 \le j \le r \\ j \neq k}} |\xi_{kj}| \quad (1 \le k \le r)$$

اثبت أن هذه الأشعة مستقلة خطياً على C .

6. ما هو الفضاء الجزئي من R^4 المولد عن الأشعة :

؟ $c = (2, 0, 1, 1)$ ، $b = (1, 1, 0, 1)$ ، $a = (1, -1, 1, 0)$

7. عبر عن مفاهيم المقياس من نمط منتهي والمقياس الحر من نمط منتهي ، وأساس هذا المقياس ، في لغة الزمر التبديلية المشار إليها صريحاً (تعتبر هذه الزمرة كـ Z - مقياس تبعاً للمثال 5 من 10§) .

م 8. ليكن V فضاء شعاعياً منتهي الأبعاد على حقل الأعداد الكسرية Q . نقول عن M من V إنه «شبكة» في V إذا كان M زمرة جزئية منتهية من الزمرة الجمعية V وإذا كان M يحتوي على جملة مولدة لـ V .

أ) لتكن M زمرة جزئية من نمط منته من V . حتى يكون M شبكة في V ، يلزم ويكفي أن يوجد ، من أجل كل $x \in V$ ، عدد صحيح $r \neq 0$ بحيث $rx \in M$. أثبت عندئذٍ أن مجموعة الأعداد $r \in Z$ بحيث $rx \in M$ تشكل مثالياً (غير معدوم) من الحلقة Z .

ب) ليكن M شبكة في V و p عدداً أولياً. لنرمز بـ M_p لمجموعة العناصر $x \in V$ التي تحقق الشرط التالي: يوجد عدد صحيح $r \neq 0$ وليس من مضاعفات p بحيث $rx \in M$.

أثبت أن M_p مقياس جزئي من V إذا إعتبرنا هذا الأخير كمقياس على الحلقة $\mathbf{Z}_p$ الواردة في § 8، التمرين 5.

ج) أثبت أنه إذا كان M شبكة في V، لدينا:

$$M = \bigcap_{p \text{ أولي}} M_p$$

د) لتكن M و N شبكتين في V. أثبت أن عدد الأعداد الأولية p بحيث:

$$M_p \neq N_p$$

عدد منته.

(سنجد خواص إضافية على الشبكات في التمرين 1 من § 18).

9. لتكن A حلقة جزئية من حقل تبديلي K؛ لنفرض أن كل عنصر من K يمكن أن يكتب على الشكل uv^{-1}، مع u، v من A و $v \neq 0$، وأن K هو A –مقياس من النمط المنتهي.

أثبت عندئذٍ أن $K = A$.

م **10.** لتكن K حلقة، M K –مقياساً من اليسار و M' مقياساً جزئياً من M.

أثبت أن:

$$x - y \in M'$$

علاقة تكافؤ على المجموعة M [تدعى «بالتوافق وفق M'» وتكتب غالباً على الشكل:

$$x \equiv y \pmod{M'}$$

أنظر § 7، رقم 6].

ب) يرمز بـ M/M' للمجموعة الحاصلة من قسمة M على هذه

العلاقة للتكافؤ ويرمز بِـ p للتطبيق القانوني لِـ M على M/M' . أثبت أنه توجد على M/M' بنية K – مقياس من اليسار وحيدة بحيث يكون لدينا :

$$p(x+y) = p(x) + p(y) \; ; \; p(\lambda x) = \lambda p(x)$$

مهما كان x ، y من M و $\lambda \in K$ (إستخدم § 4 ، أنظر أيضاً § 7 ، التمرين 16 § 8 التمرين 7 من أجل تشييدات مماثلة) . ونقول عن M/M' المزود ببنية المقياس هذه ، إنه «المقياس الحاصل» من M على المقياس الجزئي M' .

ج) لنرفق كل مقياس جزئي من M/M' بصورته العكسية وفق التطبيق p ؛ اثبت أننا نحصل بهذه الطريقة على تقابل بين مجموعة المقاييس الجزئية من M/M' ومجموعة المقاييس الجزئية من M التي تحتوي على M' .

د) أثبت أنه إذا كان M من النمط المنتهي يكون M/M' من نفس النمط مهما كان M' . إذا كان M حراً ومن النمط المنتهي هل يكون M/M' كذلك؟

م **11.** ليكن M مقياساً من اليسار على حلقة K .

أ) من أجل كل $x \in M$ ، نسمي «معدم» x مجموعة العناصر $\lambda \in K$ بحيث $\lambda x = 0$. أثبت أن معدم x مثالي من اليسار من K .

ب) نفرض أن K تامة . أثبت أن العناصر x من M ذات معدم غير مقتصر على 0 تشكل مقياساً جزئياً T من M (نقول عن T إنه المقياس الجزئي لإلتواء M ونقول إن M بدون إلتواء إذا كان $T = \{0\}$) .

ج) أثبت أن المقياس الحاصل M/T (التمرين 10) هو بدون إلتواء .

د) أحسب T لما $K = \mathbf{Z}$ و $M = \mathbf{Z}^2/L$ ، حيث L هي الزمرة الجزئية) . من $\mathbf{Z}^2$ المولدة عن الشعاع $(4, 6)$.

م 12. نقول عن مقياس من اليسار M على حلقة K إنه ذو إلتواء إذا وجد من أجل كل $x \in M$ عنصر سلمي $\lambda \in K$ غير معدوم بحيث $\lambda x = 0$.

أ) ليكن M K - مقياساً من اليسار و M' مقياساً جزئياً من M لنفرض أن M' و M/M' مقياسان ذوا إلتواء. إثبت أنه، إذا كانت K تامة، يكون M مقياساً ذا إلتواء.

ب) لنفرض $K = Z$. أثبت أنه، حتى يكون K - مقياس ما من النمط المنتهي ذا إلتواء يلزم ويكفي إن يكون منتهياً.

13. ليكن M مقياساً على حلقة K. نقول عن الجزء B من M (منته أم لا) إنه «مجموعة مولدات» لـ M إذا كان المقياس الجزئي الوحيد من M الذي يحتوي على B هو M بأكمله أو، بعبارة أخرى، إذا كان عنصر من M عبارة خطية في عدد منته من عناصر B.

لنفرض M من النمط المنتهي. أثبت أنه يمكن إستخراج من M مجموعة منتهية من مولدات لـ M (يمكن إختيار جملة منتهية... من المولدات x_i في M ثم كتابة كل x_i بإستعمال عناصر من B).

م م 14. ليكن K حقلاً تبديلياً و A حلقة جزئية من K؛ نفرض أن K هو حقل كسور A معناه أنه يوجد، من أجل كل عنصر $x \in K$، عنصران u و v من A بحيث $v \neq 0$ و:

$$x = uv^{-1}.$$

ننظر فيما يلي لـ K كـ A - مقياس. ونقول عن جزء I من K انه «كسري» من الحلقة K إذا لم يقتصر على 0 وإذا كان مقياساً جزئياً من K وأخيراً إذا وجد عنصر $d \neq 0$ من K بحيث لدينا:

$$dI \subset A$$

(حيث dA يرمز إلى مجموعة الجداءات dx مع $x \in I$).

أ) حتى يكون جزء I من K مثالياً كسرياً يلزم ويكفي أن يوجد مثالي غير معدوم J من الحلقة A وعنصر $d \in A$ غير معدوم بحيث:

$$I = d^{-1} J$$

ب) ليكن I و J مثاليين كسريين ولتكن $(I : J)$ مجموعة العناصر $x \in K$ بحيث $xJ \subset I$ ، أثبت أنها مثالي كسري (يدعى غالباً «بناقل» J في I).

ج) ليكن I و J مثاليين كسريين، يرمز بـ $I + J$ لمجموعة المجاميع $x + y$ مع $x \in I$ و $y \in J$ ، وبـ IJ لمجموعة عناصر K التي تكتب كمجموع (منته) من جداءات xy مع x في I و y في J (أنظر 8§ التمرين 10 من أجل الحالة حيث I ، $J \subset A$). اثبت أن $I + J$ و IJ و $I \cap J$ هي مثاليات كسرية من الحلقة A. عمم دساتير 8§ التمرين 10 ، أ).

د) نقول عن مثالي كسري إنه قابل للقلب إذا وجد مثالي كسري J بحيث :

$$I . J = A$$

اثبت عندئذٍ إن J وحيد وأنه معطى بالعلاقة :

$$J = (A : I)$$

(ونقول عندئذٍ أن J هو مقلوب I ونرمز له بـ I^{-1}). وبعبارة أخرى حتى يكون I قابلاً للقلب يلزم ويكفي أن يكون لدينا :

$$(A : I) \cdot I = A$$

هـ) حتى يكون المثالي I قابلاً للقلب يلزم ويكفي أن يوجد عدد منته من العناصر $x_k \in I$ وعدد منته من العناصر $y_k \in (A : I)$ بحيث :

$$1 = \sum x_k y_k$$

فتشكل عندئذٍ العناصر x_k جملة مولدة لـ A - مقياس I (فالمثاليات الكسرية القابلة للقلب هي إذن من النمط المنتهي - نصطلح أن نقول عن مثالي كسرية انه من «النمط المنتهي» إذا كان من النمط المنتهي كـ A - مقياس).

و) نقول عن حلقة A إنها «حلقة لديد كيند» إذا كان كل مثالي كسري من A قابلاً للقلب . إثبت أن مجموعة المثاليات الكسرية من A تشكل زمرة إذا زودت بقانون التشكيل :

$$(I, J) \to IJ$$

ر) إذا كانت A حلقة لديد كيند ، يكون كل مثالي أولي من A وغير معدوم أعظمياً .

[أدخلت أولاً حلقات ديد كيند في نظرية الأعداد الجبرية - أنظر تمارين 34 § - ولم يعط لها تعريفاً عاماً ومجرداً إلا بعد هذا بكثير . إن الخاصية الأساسية لهذه الحلقات هي أنه في كل حلقة من نوع ديد كيند يكتب كل مثالي بطريقة وحيدة - باستثناء إمكانية إجراء تباديل فيها - على شكل جداء مثاليات أولية ، أنظر 18 § ، التمرين 7 . والعكس بالعكس فهذه الخاصية تميز حلقات ديد كيند . سيعطي التمرين 50 § 34 تمييزاً ثالثاً قابلاً للاستعمال العملي بسهولة أكثر .

لنذكر أخيراً أن حلقات ديد كيند تدخل ليس في نظرية الأعداد الجبرية فحسب بل أيضاً في دراسة المنحنيات الجبرية وفي كثير من المواضيع الأخرى للهندسة الجبرية ، فهذا يبرر إدخال ودراسة حلقات ديد كيند «المجردة» .

وكمثال إبتدائي بقدر الإمكان لحلقة من نوع ديد كيند ، وبإستثناء طبعاً الحلقة $\mathbf{Z}$. نذكر الحلقة $\mathbf{Z}[\sqrt{d}]$ حيث $d \equiv 2$ أو 3 (mod 4)].

م 15 . لتكن K حلقة و X مجموعة . نشير بـ $K^{(X)}$ لمجموعة جميع التطبيقات :

$$u : X \to K$$

بحيث يكون عدد العناصر $x \in X$ التي تحقق $u(x) \neq 0$ عدداً منتهياً . أثبت أن $K^{(X)}$ مقياس جزئي من الـ K - مقياس من اليسار K^X (المكون من جميع تطبيقات لـ K في X) . من أجل كل $x \in X$ ، نعتبر العنصر e_x من $K^{(X)}$ المعرف بـ :

$$e_x(y) = \begin{cases} 1 & y = x \text{ إذا كان } \\ 0 & y \neq x \text{ إذا كان } \end{cases}$$

اثبت أن الجماعة $(e_x)_{x\in X}$ تشكل أساساً لـ K - مقياس من اليسار $K^{(X)}$ وأن مركبات كل عنصر $u \in K^{(X)}$ بالنسبة لهذا الأساس هي العناصر السلمية $u(x)$ ، وبعبارة أخرى أنه لدينا :

$$u = \sum_{x\in X} u(x) \cdot e_x$$

من أجل كل $u \in K^{(X)}$.

ليكن f تطبيقاً لـ X في K - مقياس من اليسار M . اثبت وجود تمثيل وتمثيل وحيد .

$$\bar{f} : K^{(X)} \to M$$

بحيث $\bar{f}\,(e_x) = f(x)$ مهما كان $x \in X$.

(تدعى عموماً عناصر المقياس $K^{(X)}$ «بالعبارات الخطية الشكلية» لعناصر X ذات عوامل في K ، ويطابق غالباً عنصر الأساس e_x لهذا المقياس مع العنصر $x \in X$ الموافق) .

م 16. لتكن K و L حلقتين تبديليتين و $j_1, \ldots, j_n$ تماثلات لـ K في L مختلفة مثنى مثنى . اثبت أن $j_1, \ldots, j_n$ مستقلة خطياً في الـ L - مقياس المكون من جميع تطبيقات K في L (نظرية ديد كيند) (إكتب علاقة خطية بين $j_1, \ldots, j_n$ ثم إستعمل المطابقة $j_k(xy) = j_k(x)j_k(y)$ لترجع إلى حالة $n - 1$ تماثل) .

م 17. لتكن G زمرة تبديلية و K حلقة تبديلية و $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ تماثلات لـ G في الزمرة الضربية K^* مختلفة مثنى مثنى . أثبت أن $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ مستقلة خطياً على K ، معناه إذا كانت العناصر $a_1, \ldots, a_n$ من K ، تحقق :

$$a_1\,\varrho_1(s) + \ldots + a_n\,\varrho_n(s) = 0 \text{ من أجل كل } s \in G \text{ ،}$$

لدينا عندئذٍ $a_1 = \ldots = a_n = 0$ (برهن بالتدرج على n)

مثال : لتكن $c_1, \ldots, c_n$ أعداداً عقدية مختلفة مثنى مثنى ، نعتبر التوابع :

$$e^{c_1 t}, \ldots, e^{c_n t}$$

من أجل $t \in \mathbf{R}$ ، أثبت أنها مستقلة خطياً على $\mathbf{C}$.

1. نعتبر المصفوفات (ذات عناصر من $\mathbf{C}$) .

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ ، } I_2 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \text{ ، } I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ، } I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ ، } I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

أثبت الخمس عشر علاقة التالية :

$[I_1, I_3] = 2I_3$ ، $[I_1, I_4] = 2I_4$ ، $[I_2, I_3] = 2I_4$

$[I_1, I_5] = -2I_5$ ، $[I_1, I_6] = -2I_6$ ، $[I_2, I_5] = -2I_6$

$[I_3, I_5] = I_1$ ، $[I_3, I_6] = I_2$ ، $[I_4, I_5] = I_2$

$[I_2, I_4] = -2I_3$ ، $[I_2, I_6] = 2I_5$ ، $[I_4, I_6] = -I_1$

$[I_1, I_2] = 0$ ، $[I_3, I_4] = 0$ ، $[I_5, I_6] = 0$

حيث نضع بصفة عامة :

$$[X, Y] = XY - YX$$

أوجد جميع المصفوفات المربعة من الرتبة 2 التي تتبادل مع المصفوفات الست I_1 ، ... ، I_6 .

2. أثبت دساتير التمرين السابق من أجل المصفوفات :

$$I_1 = 2\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad I_2 = 2\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. أوجد جميع المصفوفات المربعة من الرتبة 3 التي تتبادل مع المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(نأخذ كحلقة الأســاس إما الحقل **C**. وإما حقلاً تبديلياً كيفياً وإمّا حلقة كيفية - حسب الخاطر . . .) .

4. لتكن K حلقة تبديلية . أثبت أن التطبيق لِـ$M_2(K)$ في $M_4(K)$ الذي يحول كل مصفوفة $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ إلى المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix} ،$$

تشـاكل بين الحلقة $M_2(K)$ وحلقة جزئية من $M_4(K)$. كيف يترجم هذا بعبارات المقاييس؟

5. احسب جداء المصفوفات الثلاث :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} ، \quad \begin{pmatrix} 70 & 34 & -107 \\ 52 & 26 & -68 \\ 101 & 50 & -140 \end{pmatrix} .$$

$$\begin{pmatrix} 27 & -18 & 10 \\ -46 & 31 & -17 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} .$$

اجر الحساب بأخذ $\mathbf{Z}/7\,\mathbf{Z}$ كحلقة أساس (أي حلقة صفوف التوافق وفق 7) .

6. أحسب مكعب المصفوفة المربعة من الرتبة n :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \ldots 1 \\ 0 & 1 & 1 \ldots 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 \ldots 1 \end{pmatrix}$$

7. لتكن $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مصفوفة مربعة من الرتبة 2 وذات عناصر في حلقة تبديلية ما . أثبت أن لدينا العلاقة :

$$.A^2 - (a + d)A + (ad - bc)\, 1_2 = 0$$

8. لتكن مصفوفة مربعة معطاة :

$$A = (\alpha_{ij})_{1 \le i,j \le n}$$

وذات عناصر في حلقة تبديلية K ، نسمي «أثر» A العنصر السلمي :

$$\text{،}\ Tr(A) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn}$$

الذي يساوي مجموع عناصر قطر A . أثبت أن :

$$Tr(AB) = Tr(BA) \quad \text{،} \quad Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$$

مهما كانت المصفوفتان A و B .

نفرض $K = \mathbf{C}$. استنتج مما سبق أنه يستحيل أن نجد مصفوفتين مربعتين X و Y من الرتبة n بحيث :

$$.XY - YX = 1_n$$

9. لتكن K حلقة تبديلية و d عنصراً من K . أثبت أن المصفوفات :

$$\begin{pmatrix} x & dy \\ y & x \end{pmatrix}$$

(حيث x و y عنصران كيفيان من K) تشكل حلقة جزئية L من $M_2(K)$ وأن L متشاكل مع الحلقة $K[\sqrt{d}]$ الواردة في § 9. أدرس الحالة حيث $K = \mathbf{R}$ و $d = -1$.

10. نقول عن مصفوفة مربعة X من الرتبة n وذات عناصر من حلقة K إنها «عديمة القوة» إذا وجد عدد طبيعي $r \geq 1$ بحيث $X^r = 0$ وإنها «وحيدة القوة» إذا كانت المصفوفة $X - 1_n$ عديمة القوة. نفرض فيما يلي أن $K = \mathbf{C}$. من أجل مصفوفة N عديمة القوة ومصفوفة $\cup$ وحيد القوة معطاتين، نضع (أنظر § 8 التمرين 2):

$$\exp(N) = 1 + \frac{N}{1!} + \frac{N^2}{2!} + \dots + \frac{N^k}{k!} + \dots,$$

$$\log(\cup) = -\frac{1-\cup}{1} - \frac{(1-\cup)^2}{2} - \dots - \frac{(1-\cup)^k}{k} - \dots$$

نأخذ:

$$\cup = \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ و } N = \begin{pmatrix} 0 & a & c \\ 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

تأكد من أن N عديمة القوة و $\cup$ وحيدة القوة وأن لدينا العلاقتين:

$$\log(\exp(N)) = N \text{ ، } \exp(\log(\cup)) = \cup$$

[أعط الحساب الفعلي للمصفوفتين $\exp(\log(\cup))$ و $\log(\exp(N))$ دون أن تستعمل النتيجة العامة الواردة في التمرين 2 من § 8].

11. من أجل كل عدد عقدي t ، نضع:

$$\cup(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & 2t+2t^2 & 3t + \frac{17}{2}t^2 + 4t^3 \\ 0 & 1 & 4t & 5t + 12t^3 + 3t^4 \\ 0 & 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ؛$$

أثبت أن:

$$\cup(s)\,\cup(t) = \cup(s+t)$$

مهما كان s و t من $\mathbf{C}$ وأن $U(t) = \exp(tN)$ حيث N مصفوفة عديمة القوة يطلب حسابها.

م 12. ليكن z عدداً جبرياً، معناه (§ 11 المثال 11) عدد عقدي جذر لمعادلة جبرية ذات معاملات كسرية ليست كلها معدومة.

أ) أثبت أنه يوجد عدد طبيعي $n \geq 1$ وأعداد كسرية a_0، ...، a_{n-1} بحيث تكون لدينا علاقة من الشكل:

$$z^n = a_0 + a_1 z + \dots + a_{n-1} z^{n-1}$$

ب) لتكن K الحلقة جزئية من $\mathbf{C}$ المولدة عن $\mathbf{Q}$؛ و z، إذا اعتبرنا K كفضاء شعاعي على $\mathbf{Q}$، أثبت أنه مولد عن $1, z, \dots, z^{n-1}$.

ج) نفرض أن n أصغرى فيما سبق. أثبت أن $1, z, \dots, z^{n-1}$ يشكل أساساً لِـK الذي نعتبره كفضاء شعاعي على $\mathbf{Q}$.

د) ليكن f التطبيق لِـK في K المعطى بِـ:

$f(u) = zu$ من أجل كل $u \in K$.

أثبت أنه تماثل داخلي لِـK الذي نعتبره كفضاء شعاعي على $\mathbf{Q}$. أحسب مصفوفة f بالنسبة لأساس K المعرّف في السؤال ج).

م 13. ليكن L و M مقياسين من اليسار على حلقة ما K؛ وليكن L' مقياساً جزئياً من L و f تماثلاً لِـL في M معطيين. اثبت أن الشرطين التاليين متكافئان: أ) L' محتوى في نواة f معناه $f(x) = 0$ من أجل كل $x \in L'$؛ ب) f مركب من التطبيق القانوني لِـL على المقياس الحاصل L/L' (§ 10، التمرين 10) ومن تماثل ما لِـL/L' في M.

14. لتكن K حلقة و L، M، N ثلاث مقاييس على K من اليسار و f تماثلاً لِـL في M و p تماثلاً لِـL في N؛ نفرض أن p غامر.

أثبت أن الشرطين التاليين متكافئان : أ) لدينا $\text{Ker}(p) \subset \text{Ker}(f)$ ؛ ب) f مركب من p ومن تماثل ما لِـ N في M .

15. ليكن L الفضاء الشعاعي الحقيقي المكون من الأشعة ذات بداية معطاة 0 في الفضاء المألوف و L' الفضاء الشعاعي الجزئية من L المكون من الأشعة المعمولة على مستقيم معطى (على مستو معطى ، على التوالي) والذي يمر بِـ 0 . من أجل كل $x \in L$ ، نرمز بِـ $f(x)$ للشعاع الناتج عن الإسقاط العمودي لِـ x على L' أثبت أن التطبيق f لِـ L في L' خطي . ما هي نواته؟

م م **16.** لتكن K حلقة . نقول عن K – مقياس من اليسار M انه «بسيط» أو «غير قابل للإختصار» إذا لم يقتصر على 0 ولا يملك مقاييس جزئية ما عدا $\{0\}$ و M بأكمله :

أ) حتى يكون M ، المفروض غير معدوم ، بسيطاً ، يلزم ويكفي أن يوجد ، مهما كان a و $b \in M$ مع $a \neq 0$ ، عنصر $\lambda \in K$ بحيث $b = \lambda a$.

إستنتج أنه ، إذا كان K حقلاً ، يكون كل K – مقياس بسيط متشاكلاً مع K .

ب) ليكن M مقياساً بسيطاً على K . نختار في M عنصرا $a \neq 0$ ، ونرمز بِـ I لمجموعة العناصر $\lambda \in K$ بحيث $\lambda a = 0$. اثبت أن I مثالي من اليسار أعظمي من K (§ 8 ، التمرين 7) .

أثبت أن التطبيق $\lambda \rightarrow \lambda a$ لِـ K في M مركب من التطبيق القانوني لِـ K على K/I ومن تشاكل ما بين الْـ K – مقياس من اليسار K/I و M . وبالعكس ، أثبت أنه ، مهما كان المثالي من اليسار I الأعظمي من K ، يكون الْـ K – مقياس من اليسار K/I بسيطاً .

ج) ليكن L و M مقاسين من اليسار على K وبسيطين و f تماثلاً لِـ L في M .

أثبت أن f، إذا لم يكن معدوماً، تشاكل بين L و M (توطئة شور). (افحص نواة وصورة f).

د) ليكن K - مقياساً من اليسار بسيطاً L. أثبت أن حلقة التماثلات الداخلية لـ L تشكل حقلاً (غير تبديلي على العموم).

1. إن حلقة الأساس هي **R** ، أوجد مقلوبة كل من المصفوفات التالية(*) :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} ؛ \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix} ؛ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} ؛ \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

2. أحسب مقلوبة المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \dots & a^n \\ 0 & 1 & a & \dots & a^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

3. لتكن N مصفوفة عديمة القوة (معناه أن إحدى قواها معدومة) وذات عنصر من حلقة ما . أثبت أن المصفوفة $1 - N$ قابلة للقلب وأن :

$$(1 - N)^{-1} = 1 + N + N^2 + \dots$$

تطبيق : احسب مقلوبة المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(*) يمكن للقارئ المتقدم أن يستعمل دساتير كرامر لحل هذا التمرين.

4. إحسب مقلوب المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} 1 + a_1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 + a_2 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 + a_n \end{pmatrix}$$

م 5. ليكن $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{n}$. أثبت أننا نحصل على مقلوبة المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & u & w^2 & \dots & w^{n-1} \\ 1 & w^2 & w^4 & \dots & w^{2(n-1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & w^{n-1} & w^{2(n-1)} & \dots & w^{(-1)2} \end{pmatrix}$$

بتعويض w بـ w^{-1} في هذه المصفوفة ثم بتقسيم المصفوفة المحصل عليه بهذا النحو على n .

6. أوجد مصفوفة مربعة X من الرتبة 3 بحيث(*) :

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} 9 & 7 & 6 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 18 & 12 & 9 \\ 23 & 15 & 11 \end{pmatrix}.$$

7. أثبت أن الأشعة :

$$(1, 2, 1) \quad , \quad (2, 3, 3) \quad , \quad (3, 7, 1)$$

تشكل أساساً لـ $\mathbf{R}^3$ ، نفس الشئ بالنسبة للأشعة :

$$(3, 1, 4) \quad , \quad (5, 2, 3) \quad , \quad (1, 1, -6)$$

ثم أحسب مصفوفة الإنتقال من الأساس الأول إلى الأساس الثاني . نفس المسألة ، في $\mathbf{R}^4$ ، بالنسبة للأشعة :

$$(1, 1, 1, 1) \quad , \quad (1, 2, 1, 1) \quad , \quad (1, 1, 2, 1) \quad , \quad (1, 3, 2, 3)$$

(*) أنظر ملحوظة الصفحة السابقة .

وَ

$(1, 0, 3, 3)$ ، $(-2, -3, -5, -4)$ ، $(2, 2, 5, 4)$ ، $(-2, -3, -4, -4)$

8. تشكل المصفوفات :

$$\begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix}$$

حيث x و y عددان كسريان ، حقلاً جزئياً من $M_2(\mathbf{Q})$.

9. تشكل المصفوفات :

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ 2z & x & y \\ 2y & 2z & x \end{pmatrix}$$

حيث x ، y ، z أعداد كسرية ، حقلاً جزئياً من $M_3(\mathbf{Q})$.

م **10.** لتكن K حلقة تبديلية و p و q عنصرين معطيين من K . نعتبر الحلقة :

$$L = K[\sqrt{p}]$$

والمجموعة $M \subset M_2(L)$ ، المكونة من المصفوفات من الشكل :

$$z = \begin{pmatrix} x & qy \\ \overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix}$$

مع $y, x \in L$ (من أجل الاشارات أنظر § 9)

أ) أثبت أن M حلقة جزئية من $M_2(L)$.

ب) من أجل كل مصفوفة :

$$z = \begin{pmatrix} x & y \\ \overline{y} & \overline{x} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

من M ، نضع :

$$z^* = \begin{pmatrix} \overline{x} & -qy \\ -\overline{y} & x \end{pmatrix}$$

أثبت أنه لدينا $(z_1 z_2)^* = z_2^* z_1^*$ مهما كان z_1 و z_2 من M .

جـ) من أجل المصفوفة (1)، أحسب الجداء $z\,z^*$ ثم أنه حتى يكون z قابلاً للقلب يلزم ويكفي أن يكون:

$$N(z) = \bar{x}\,x - q\,\bar{y}\,y$$

عنصراً قابلاً للقلب في الحلقة L.

د) نفرض أن K حقل تبديلي وأن p غير مربع في K. أثبت تكافؤ القضيتين التاليتين: (1) الحلقة M حقل (2) لا توجد أية ثنائية مكونة من عنصرين x و y من K بحيث:

$$q = x^2 - py^2.$$

هـ) نفرض $K = \mathbf{R}$. أثبت أن M حقل إذا وإذا فقط كان:

$$p < 0 \text{ ، } q < 0$$

أثبت أن الحقل M المحصل عليه بهذا النحو متشاكل مع ذلك الذي نحصل عليه بأخذ $p = q = -1$ (والذي يدعى بحقل «الأرباعيات» وهو أول مثال - تاريخياً - لحقل غير تبديلي).

و) نفرض $K = \mathbf{Q}$ و p، و q طبيعيين. أثبت أنه، حتى يكون M حقلاً، يلزم ويكفي أن لا يكون للمعادلة:

$$px^2 + qy^2 = z^2$$

أي جذر «صحيح» (x, y, z) ماعدا $(0, 0, 0)$. أثبت أن هذا الشرط محقق في الحالات التالية:

$$p = 5,\ q \equiv 2 \pmod 5 \quad ; \quad p = 5,\ q \equiv 3 \pmod 5;$$
$$p = 11,\ q \equiv 2, 6, 7, 8 \text{ أو } 10 \pmod{11}.$$

م 11. أثبت أن المصفوفات من الشكل:

$$\begin{pmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{pmatrix}$$

حيث x ، y ، z ، t أعداد حقيقية كيفية ، تشكل حقلاً جزئياً من $M_4(\mathbf{R})$ ، وأنه يوجد تشاكل بين هذا الحقل الجزئي وحقل الأربعيات المعرف في التمرين السابق.

أثبت أنه إذا إعتبرنا هذا الحقل كفضاء شعاعي فهو يمتع بأساس مكون من أربعة عناصر e ، i ، j ، k بحيث:

$$e^2 = e, i^2 = j^2 = k^2 = -e$$

$$ei = ie = i, ej = je = j, ek = ke = k$$

$$ij = -ji = k, jk = -kj = i; ki = -ik = j.$$

هل نحصل أيضاً على حقل إذا سمحنا للمتحولات x ، y ، z ، t بأخذ قيم عقدية كيفية؟

12. إذا كانت حلقة الأساس هي $\mathbf{C}$ ، أحسب مقلوبة المصفوفة:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1+i & -i \\ 0 & i & 1-2i \\ 1 & 1 & i \end{pmatrix}$$

13. نعتبر المصفوفة $U(t)$ الواردة في التمرين 11 من §§ 12 ، 13 ، 14 . أحسب مقلوبتها بإجراء أقل عدد ممكن من الحسابات.

14. لتكن K حلقة تبديلية. أثبت أن المصفوفات من الشكل:

$$\begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(x ، y ، $z \in K$) تشكل زمرة جزئية من $GL(3, K)$. عين مركز هذه الزمرة الجزئية.

م **15.** لتكن K حلقة تبديلية و n عدداً طبيعياً. أثبت أن المصفوفات المربعة ومن الرتبة n وذات عناصر من K ومن الشكل:

$$\begin{pmatrix} 1 & * & * \dots * \\ 0 & 1 & * \dots * \\ 0 & 0 & 1 \dots * \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 & 0 \dots 1 \end{pmatrix}$$

(حيث تشير العلامات * إلى عناصر كيفية من K) تشكل زمرة جزئية من $GL(n, K)$ ثم عين مركز هذه الزمرة الجزئية.

16. ليكن K حقلاً. نشير بـ H للزمرة الجزئية من $GL(n, K)$ المكونة من مصفوفات $GL(n, K)$ القطرية أوجد منظم (التمرين 13 من 7§) H في $GL(n, K)$.

م 17. حتى يشكل العنصران (a, b) و (c, d) من Z^2 أساساً له يلزم ويكفي أن يكون:

$$ad - bc = +1 \quad \text{أو} \quad -1$$

18. لتكن K حلقة تبيدلية و I مثالياً من K. لتكن H مجموعة المصفوفات $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. ذات عناصر من K، التي تحقق:

$$.ad - bc = 1, a \equiv d \equiv 1 \ (\text{mod } I), b \equiv c \equiv 0 \ (\text{mod } I)$$

أثبت أن H زمرة جزئية لا متغيرة من $GL(2, K)$.

م م 19. ليكن K حقلاً منتهياً ذا n عنصراً. أحسب عدد عناصر الزمرة $GL(n, K)$.

م 20. من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$، نرمز بـ G_n لمجموعة المصفوفات $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ مع a ، b ، c ، $d \in Z$ و $ad - bc = n$ ، ونضع $G_1 = G$.

أ) أثبت أن G زمرة جزئية من $GL(2, Z)$ هل لدينا نفس الشئ بالنسبة لـ G_n مع $n \geq 2$؟

ب) إذا كان $X \in G_n$ أثبت أنه لدينا $U.X.V \in G_n$ مهما كان U ، $V \in G$.

ج) أثبت أنه، من أجل كل $X \in G_n$ ، يوجد U ، $V \in G$ بحيث تكون $U X V$ قطرية.

م 17. ليكن (a, b) عنصراً من الـ $\mathbf{Z}$ - مقياس $\mathbf{Z}^2$.

أ) أثبت أنه إذا وجد أساس لـ $\mathbf{Z}^2$ يحتوي على u فيوجد عندئذ شكل خطي f على المقياس المعتبر بحيث $f(u) = 1$. إستنتج بعدئذ أن العددين a و b أوليان فيما بينهما.

ب) نفرض بالعكس أن a و b أوليان فيما بينهما. أثبت وجود شكل خطي f على $\mathbf{Z}^2$ بحيث $f(u) = 1$. أثبت وجود شعاع v بحيث تكون $\text{Ker}(f)$ هي مجموعة المضاعفات الصحيحة لـ v. أثبت أن الشعاعين u و v يشكلان أساساً لـ $\mathbf{Z}^2$.

ج) نأخذ $u = (6, 35)$، أوجد شعاعاً v بحيث يشكل u و v أساساً في $\mathbf{Z}^2$.

18. ليكن L و M مقياسين من اليسار على حلقة ما K و:

$$f : M \to L$$

تماثلاً غامراً. نفرض L حراً ومن النمط المنتهي. أثبت وجود تماثل:

$$g : L \to M$$

بحيث: $f \circ g = id$.

م 19. ليكن L و M مقياسين من اليسار على حلقة ما، و L' و M' مقياسين جزئيين من L و M، و u تماثلاً لـ L في M بحيث $u(L') \subset M'$. نشير بـ p و q للتطبيقين القانونيين لـ L على L/L' ولـ M على M/M' (§§ 10، 11 التمرين 10). اثبت أنه يوجد تماثل وتماثل وحيد:

$$\bar{u} : L/L' \to M/M'$$

بحيث:

$$q \circ u = \bar{u} \circ p$$

(نقول عن $\bar{u}$ إنه التمثيل المستخرج من u بالمرور إلى الحواصل).

ما هي الشروط التي تجعل $\bar{u}$ متبايناً أو غامراً أو تقابلاً؟

20. ليكن k حقلاً تبديلياً . في الزمرة $SL(2, k)$ المكونة من المصفوفات : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ ذات عناصر من k وبحيث $ad - bc = 1$ ، نعتبر المصفوفات :

$$x_+(t) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} , \quad x_-(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

مع $t \in k$. نشير بـ α إلى أحد الرمزين + و − ، بـ $-\alpha$ إلى الرمز المعاكس ، من أجل $t \neq 0$ نعرف المصفوفات :

$$w_\alpha(t) = x_\alpha(t)\, x_{-\alpha}\left(-\frac{1}{t}\right) x_\alpha(t), \quad h_\alpha(t) = w_\alpha(t)\, w_\alpha(1)^{-1}$$

أ) احسب هذه المصفوفات ثم بين أن المصفوفتين $x_+(t)$ و $x_-(t)$ تولدان : $SL(2, k)$.

ب) أثبت العلاقات :

(1) $$x_\alpha(t + u) = x_\alpha(t)\, x_\alpha(u); \quad t, u \in k$$

(2) $$w_\alpha(t)\, x_\alpha(u)\, w_\alpha(t)^{-1} = x_{-\alpha}\left(-\frac{u}{t^2}\right); t, u \in k, t \neq 0;$$

(3) $$h_\alpha(tu) = h_\alpha(t)\, h_\alpha(u); t, u \in k, t \neq 0, u \neq 0.$$

جـ) أثبت أن كل مصفوفة $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, k)$.

يمكن أن تكتب بطريقة وحيدة إما على الشكل $g = h_+(t)\, x_+(u)$ وإما على الشكل $g = h_+(t)\, x_+(u)\, w x_+(v)$ ، حيث وضعنا $w = w_+(1)$ (ميز حالتين حيث $c = 0$ أو $c \neq 0$) .

د) نسمي الزمرة المشتقة من الزمرة G الزمرة الجزئية من G ولتكن G' المولدة عن «مبدلات» عناصر G وهي العناصر من الشكل $(x, y) = xyx^{-1}y^{-1}$. أثبت أن $SL(2, k)$ تساوي زمرتها المشتقة بشرط أن يحتوي k على 4 عناصر على الأقل .

م **21.** نعتبر في $SL(2, k) = G$ الزمرة الجزئية U المكونة من العناصر $x_+(t)$ والزمرة الجزئية H المكونة من العناصر $h_+(t)$ ؛ فلدينا إذن $G = HU \cup HUwU$ وفقاً للسؤال جـ) من التمرين السابق . نحن

ننوي أن نبرهن أنه إذا كان k يحتوي على 4 عناصر على الأقل فإن الزمرة G تحتوي على زمرة جزئية لا متغيرة وحيدة تختلف عن $\{e\}$ و G وهي الزمرة الجزئية Z المكونة من 1 و 1 - (والتي تقتصر من جهة أخرى على العنصر الحيادي إذا كنا في حقل ذي ميزة تساوي 2 ، لاحظ أن هذه الزمرة الجزئية هي ، في جميع الحالات ، مركز G ، كما نتأكد منه بسهولة) . نضع $B = H \cup$.

أ) أثبت أن $H = B \cap w B w^{-1}$ ، ثم إستنتج أنه إذا كان $M \subset B$ يكون عندئذٍ $M \subset H$.

ب) نفرض $M \subset H$ و $M \ni h = h_+(t)$. بحساب معدل h و $x_-(u)$ أثبت أن M يحتوي على $x_-\left(u - \frac{u}{t^2}\right)$ ، ثم إستنتج أن $M \subset Z$.

ج) لنفرض أن M غير محتوى في B . أثبت ، مستخدماً السؤال ج) من التمرين السابق ، أن $G = MB$ ، ثم إستنتج (§ 7 ، التمرين 16) أن الزمرة الحاصلة G/M متشاكلة مع $B/B \cap M$.

د) نفرض $\operatorname{card}(k) \geq 4$ ، فلدينا إذن $G = G'$ وفقاً للتمرين السابق . أثبت أن الزمرة G/M تساوي زمرتها المشتقة . إستنتج من هنا ومن السؤال السابق أن $M = G$ إذا لم تكن M محتواة في B (بمراعاة أن $U \subset B'$ و $U' = \{e\}$ ثم بملاحظة أن الزمرة الجزئية الوحيدة L اللا متغيرة من B بحيث تكون B/L مساوية لزمرتها المشتقة هي B نفسها) .

م 22. في زمرة G ، نعتبر جماعتين من العناصر ولتكن $\bar{x}_+(t)$ و $\bar{x}_-(t)$ وهما تتعلقان بوسيط t الذي يتغير في حقل تبديلي k معطى . إنطلاقاً من عناصر $\bar{x}_\alpha(t)$ وهي من G نعرف عناصر $\bar{w}_\alpha(t)$ و $\bar{h}_\alpha(t)$ من G بدساتير التمرين 20 ، معناه :

$$\bar{w}_\alpha(t) = \bar{x}_\alpha(t)\, \bar{x}_{-\alpha}\left(-\frac{1}{t}\right) \bar{x}_\alpha(t) \; , \; \bar{h}_\alpha(t) = \bar{w}_\alpha(t)\, \bar{w}_\alpha(1)^{-1}$$

ثم نفرض أن علاقتي التمرين 20 ، (1) و (2) محققتان أي أن :

$$(1) \qquad \hat{x}_\alpha(t+u) = \hat{x}_\alpha(t)\,\hat{x}_\alpha(u), \qquad \hat{w}_\alpha(t)\,\hat{x}_\alpha(u)\,\hat{w}_\alpha(t)^{-1} = \hat{x}_{-\alpha}\left(-\frac{u}{t^2}\right)$$

(2)

أ) أثبت الدساتير التالية :

$$\hat{w}_\alpha(t)\,\hat{w}_\alpha(u)\,\hat{w}_\alpha(t)^{-1} = \hat{w}_{-\alpha}\left(-\frac{u}{t^2}\right),$$

$$\hat{w}_\alpha(t)\,\hat{h}(u)\,\hat{w}_\alpha(t)^{-1} = \hat{h}_{-\alpha}\left(-\frac{u}{t^2}\right)\hat{h}_{-\alpha}\left(-\frac{1}{t^2}\right)^{-1}$$

$$\hat{w}_\alpha(t)\,\hat{x}_\alpha(u)\quad \hat{w}_\alpha(t)^{-1} = \hat{x}_{-\alpha}\left(-\frac{u}{t^2}\right),$$

$$\hat{h}_\alpha(t)\,\hat{x}_\alpha(u)\,\hat{h}_\alpha(t)^{-1} = \hat{x}_\alpha(t^2 u)$$

$$\hat{h}_\alpha(t)\,\hat{w}_\alpha(u)\,\hat{h}_\alpha(t)^{-1} = \hat{w}_\alpha(t^2 . u), \quad \hat{h}_\alpha(t)\,\hat{h}_\alpha(u),$$

$$\hat{h}_\alpha(t)^{-1} = \hat{h}_\alpha(t^2 u)\,\hat{h}_\alpha(t^2)^{-1}.$$

$$\hat{w}_\alpha\left(-\frac{1}{t}\right) = \hat{w}_\alpha(t), \quad \hat{w}_\alpha(t)^{-1} = \hat{w}_\alpha(-t)$$

$$\hat{h}\left(-\frac{1}{t}\right) = \hat{h}_{-\alpha}(t), \quad \hat{h}_\alpha(t)\,\hat{h}_\alpha\left(-\frac{1}{t}\right) = \hat{h}_\alpha(-1),$$

$$\hat{w}_\alpha(1)\,\hat{h}_\alpha(t)\,\hat{w}_\alpha(1)^{-1} = \hat{h}_\alpha\left(\frac{1}{t}\right), \quad \hat{w}_\alpha(1)^{-2} = \hat{h}_\alpha(-1).$$

ب) لتكن U الزمرة الجزئية من G المكونة من العناصر $\hat{x}_+(t)$ و H الزمرة الجزئية المولدة عن العناصر $\hat{h}_+(t)$. نضع $\hat{w} = \hat{w}_+(1)$ و $N = H \cup \hat{w} H$. أثبت أن N زمرة جزئية من G ثم أن H لا متغيرة في N . أثبت أن $U N U \supset \hat{w} U \hat{w}$ (مجموعة الجداءات $u' n u''$ مع u' و $u'' \in U$ و $n \in U$) وأن المجموعة $U H \cup U H \hat{w} U$. هي الزمرة الجزئية من G المولد عن العناصر $x_\alpha(t)$.

ج) لنأخذ مرة ثانية الزمرة $SL(2, k)$ الواردة في التمرين 20 والعناصر $x_\alpha(t)$ ، $w_\alpha(t)$ ، $h_\alpha(t)$ من هذه الزمرة. أثبت مستخدماً السؤال ج) من التمرين 20 . أنه يوجد تطبيق وتطبيق وحيد π لـ $SL(2, k)$ في G بحيث :

$$\pi\big(h_{\alpha}(t)\, x_{\alpha}(u)\big) = \tilde{h}_{\alpha}(t)\, \tilde{x}_{\alpha}(u),$$

$$\pi\big(h_{\alpha}(t)\, x_{\alpha}(u)\, w x_{\alpha}(v)\big) = \tilde{h}_{\alpha}(t)\, \tilde{x}_{+}(u)\, \tilde{w}\, \tilde{x}_{\alpha}(v)$$

أثبت أنه حتى يكون π تماثلاً يلزم ويكفي أن تتحقق العلاقة :

$$\tilde{h}_{\alpha}(tu) = \tilde{h}_{\alpha}(t)\, \tilde{h}_{\alpha}(u) \qquad (3)$$

وبعبارة أخرى لتشييد تمثيلاً لـ $SL(2, k)$ في زمرة ما، يكفي إعطاء عناصر $\tilde{x}_{+}(t)$ و $\tilde{x}_{-}(t)$ من G تحقق العلاقات (1)، (2)، (3) (التمرين 20) («تعريف $SL(2, k)$ بواسطة مولدات وعلاقات»).

م م 23. نعتبر الزمرة $G = GL(n, k)$ على حقل تبديلي k والزمرة الجزئية T من G المكونة من المصفوفات القطرية والزمرة الجزئية B المكونة من المصفوفات التي عناصرها الكائنة تحت القطر معدومة كلها و U الزمرة الجزئية من B المكونة من المصفوفات التي عناصرها القطرية تساوي 1. وأخيراً نرمز بـ N لمجموعة العناصر $n \in G$ بحيث $nTn^{-1} = T$ (منظم T في G). نطابق عناصر G مع تشاكلات الفضاء k^n الداخلية ونرمز بـ $e_1, \ldots, e_n$ للأساس القانوني في هذا الفضاء.

أ) أثبت أن $g \in N$ إذاً وفقط إذا وجد تبديل $w \in \sigma_n$ وعناصر سلمية $t_i \neq 0$ بحيث يكون لدينا $g(e_i) = t_i\, e_{w(i)}$ من أجل $1 \leq i \leq n$. إستنتج وجود تشاكل بين الزمرة الخاصة $W = N/T$ والزمرة التناظرية σ_n. من أجل $1 \leq i \leq n-1$، ليكن $w_i \in G$ المصفوفة التي تستبدل أحد الشعاعين e_i, e_{i+1} بالآخر ولا تغير الأشعة e_j من أجل كل j لا يساوي i و $i+1$ أثبت أن N مولد عن T وعن العناصر ω_i.

ب) من أجل $j \neq i$ و $t \in k$ نرمز بـ $x_{ij}(t)$ لعنصر G المعرف بالدساتير التالية :

$$x_{ij}(t)\, e_j = e_j + t e_i \ ، \ x_{ij}(t)\, e_k = e_k \ \text{إذا كان}\ k \neq j$$

ما هي مصفوفة $x_{ij}(t)$ ؟ أثبت أن $x_{ij}(t+u) = x_{ij}(t)\, x_{ij}(u)$ مهما كان t ، $u \ni k$ ثم أن العناصر $x_{ij}(t)$ ، من أجل i و j معطيين و t متحول ، تشكل زمرة جزئية U_{ij} من G . لنضع بوجه عام $(a, b) = aba^{-1}b^{-1}$ أثبت أن :

$(x_{ij}(t), x_{je}(t)) = x_{ie}(tu)$ إذا كان i ، j ، e مختلفة مثنى مثنى

$(x_{ij}(t), x_{me}(u)) = 1$ إذا كان $j \neq m$ و $i \neq e$.

أثبت أن U مولد عن المصفوفات $x_{i,i+1}(t)$ مع $(1 \leq i \leq n-1, t \in k)$. أحسب $n x_{ij}(t)\, n^{-1}$ من أجل $n \ni N$.

ج) لتكن B' الزمرة الجزئية من G المكونة من المصفوفات التي عناصرها الكائنة فوق القطر معدومة . أثبت وجود عنصر $n \ni N$ بحيث $B' = n B n^{-1}$ ثم أن B' مولد عن T وعن العناصر $x_{i+1,i}(t)$.

ليكن g عنصراً ما من G ؛ أثبت وجود عنصر $b \ni B$ وعنصراً $b' \ni B'$ بحيث ، بوضع $g = bb'\, g_1$ ، تكون المصفوفة g_1 من الشكل :

$$g_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & * \ldots * \\ & \cdots\cdot \\ 0 & * \ldots * \end{pmatrix}$$

إستنتج أن G مولد عن B و B' أو ، وهذا يرجع لنفس الشئ ، عن B و N (إستدل بالتدريج على n) .

أثبت مستخدماً دساتير التمرين 20 أن الزمرَة الجزئية من G المولدة عن العناصر $x_{i,i+1}(t)$ وعن العناصر $x_{j+1,j}(t)$ هي $SL(n, k)$ وهي مجموعة العناصر $g \ni GL(n, k)$ بحيث $\text{dét}\,(g) = 1$ (هذا السؤال الذي يعرض القارئ مطلعاً على نظرية المعينات لا يستخدم فيما يلي) .

د) نعتبر الزمرة الجزئية $B_i = B \cap \omega_i^{-1} B\, \omega_i$. أثبت أن B_i لا متغيرة في B ثم أن كل عنصر $b \ni B$ يكتب ، بطريقة وحيدة ، على شكل جداء عنصر من $U_{i,i+1}$ وعنصر من B_i . استنتج أن الصف

المزدوج $B\omega_i B$ وهي مجموعة العناصر $b'\omega_i b''$ مع b'، $B \ni b''$ يساوي إتحاد الصفوف $B\omega_i x_{i,i+1}(t)$ مع $k \ni t$.

هـ) نضع $\cup_{jk} = n\ \cup_{i,i+1} n^{-1}$. أثبت أن المجموعة $B\omega_i BnB$ (مع $N \ni n$) تساوي إتحاد الصفوف $B\omega_i nx_{jk}(t) B$ مع t متحول. إستنتج أن:

$$B\omega_i BnB = B\omega_i nB \text{ إذا كان } j < k \text{ وَ}$$

$$B\omega_i BnB = BnB \cup B\omega_i nB \text{ إذا كان } j > k.$$

(لاحظ أنه يكفي أن نتأكد في $GL(2, k)$ أن $B \ni x_{i+1,i}(t)$ $B\omega_i$. إذا كان $t \neq 0$).

و) ليكن G_0 إتحاد الصفوف المزدوجة BnB (وعدد هذه الصفوف منته لأن N/T منته). بإستعمال كون N مولدة عن T والعناصر ω_i، أثبت مستخدماً السؤال السابق أن $G_0 \supset nG_0$ مهما كان $N \ni n$ أثبت أن G_0 زمرة جزئية من G ثم إستنتج أن:

$$G = \cup\ BnB$$

(نظرية الزمرة الخطية لبروهة).

م 24. ليكن k حقلاً منتهياً ذا q عنصراً وليكن V فضاء شعاعياً منتهي الأبعاد وعدد أبعاده n على k. وليكن m عدداً طبيعياً محصوراً بين 0 و n.

أ) لتكن X_m مجموعة الجماعات $(x_1, ..., x_m)$ ذات عناصر من V مستقلة خطياً. أثبت أن:

$$\text{card}(X_m) = (q^n - 1)(q^n - q)\dots(q^n - q^{m-1})$$

(إستدل بالتدريج على m).

ب) أثبت أن رتبة زمرة التشاكلات الذاتية $GL(V)$ لـ V تعطى بالدستور:

$$\text{card } GL(V) = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1}) = q^{n^2} \prod_{i=1}^{i=n} \left(1 - \frac{1}{q^i}\right)$$

ج) لتكن $G_{n,m}$ مجموعة الفضاءات الشعاعية الجزئية من V ذات m بعداً (تدعى «بالغراسمنية(*)») . أثبت أن :

$$\text{card } G_{n,m} = q^{n^2-m^2} \prod_{i=m+1}^{i=n} \left(1 - \frac{1}{q^i}\right).$$

25. ليكن V فضاء شعاعياً على الحقل المكون من عنصرين ؛ ليكن x ، y ، z عناصراً V الثلاثة غير المعدومة .

أ) أثبت أن $x + x = y + y = z + z = 0$ وأن $x + y = z$ ، $y + z = x$ ، $z + x = y$.

ب) إستنتج أن الزمرة $GL(V)$ لتشاكلات V الذاتية متشاكلة مع زمرة تباديل x ، y ، z .

26. ليكن V فضاء شعاعياً ذا بعدين على الحقل المكون من ثلاث عناصر .

أ) أثبت أن V تحتوي على أربع فضاءات جزئية ذات بعد واحد ولتكن D_1 ، D_2 ، D_3 ، D_4 .

ب) كل عنصر من زمرة تشاكلات V الداخلية $GL(V)$ تبديل العناصر D_i بعضها بالبعض الآخر . فنستنتج من هذا تمثيلاً :

$$\varepsilon : GL(V) \to S_4 ،$$

حيث S_4 يشير لزمرة تباديل $\{1, 2, 3, 4\}$. أثبت أن نواة ε هي $\{\pm 1\}$؛ إستنتج أن ε غامر (قارن بين رتبتي الزمرتين) .

ج) لتكن $SL(V)$ الزمرة الجزئية من $GL(V)$ المكونة من عناصر ذات معين يساوي 1 . أثبت أن ε يعرف تشاكلاً بين $SL(V)$ والزمرة المتناوبة A_4 ، المكونة من التباديل الزوجية ؛ من S_4 .

[يفرض هذا السؤال أن القارئ مطلعاً على نظرية المعينات] .

(*) (grarsmannienne)

1. نعتبر الأشكال الخطية الثلاث :

$$2x - y + 3z \quad , \quad 3x - 5y + z \quad , \quad 4x - 7y + z$$

على $\mathbf{R}^2$ ، هل تشكل أساساً لثنوي $\mathbf{R}^3$؟

2. أثبت أن الأشكال الخطية :

$$x + 2y + z \quad , \quad 2x + 3y + 3z \quad , \quad 3x + 7y + z$$

نشكل أساساً للفضاء الثنوي لِـ $\mathbf{R}^3$ ، ثم أوجد أساس $\mathbf{R}^3$ الثنوي لهذا الأساس .

3. لتكن K حلقة و f_1 ، ... ، f_n أشكالاً خطية على الـ K – مقياس من اليمين K^n . حتى تشكل هذه الأشكال أساساً لثنوي K^n يلزم ويكفي أن توجد أشعة x_1 ، ... ، $x_n \in K^n$ بحيث :

$$f_i(x_j) = \begin{cases} 1 & \text{إذا كان } i = j \\ 0 & \text{إذا كان } i \neq j \end{cases}$$

4. لتكن K حلقة تبديلية و U مصفوفة مربعة من الرتبة n ذات عناصر في K .

أ) أثبت أن العلاقتين :

$$U\,{}^tU = 1_n \quad \text{و} \quad {}^tU \cdot U = 1_n$$

متكافئان .

ب) أثبت أن المصفوفات $U \in M_n(k)$ التي تحقق الشرطين السابقين تشكل زمرة جزئية من $GL(n, K)$ («الزمرة المتعامدة ذات n متحولاً على الحقل K»).

جـ) نقول عن مصفوفة $S \in M_n(K)$ إنها «متناظرة» إذا كانت $S = {}^t S$. لتكن X و Y مصفوفتين متناظرتين ؛ حتى تكون XY متناظرة، يلزم ويكفي أن يكون لدينا $XY = YX$.

د) أثبت (بأخذ $K = \mathbf{Q}$ أو أي حقل آخر يحتوي على $\mathbf{Q}$) أن المصفوفة :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

متعامدة ومتناظرة في آن واحد.

هـ) أوجد المصفوفات المتعامدة من الرتبة 3 وذات عناصر صحيحة.

5. لتكن $M_n(K)$ حلقة المصفوفات المربعة من الرتبة n على حلقة ما K ؛ ننظر لـ$M_n(K)$ كمقياس على K من اليمين.

أثبت أنه توجد، من أجل كل شكل خطي f على $M_n(K)$، مصفوفة ومصفوفة وحيدة $A \in M_n(K)$ بحيث :

$$f(X) = Tr(AX) \text{ من أجل كل } X \in M_n(K)$$

(من أجل تعريف الرمز Tr أنظر التمرين 8 من §12). حتى يكون لدينا :

$$f(XY) = f(YX)$$

مهما كان X و $Y \in M_n(K)$ يلزم ويكفي، لما تكون الحلقة K تبديلية، أن تكون المصفوفة A متناسبة مع I_n.

1. لتكن K حلقة و L مقياساً على K و :

$$L = M_1 \oplus \dots \oplus M_n$$

فكّاً ما لـ L على شكل مجموعة مباشر لمقاييس جزئية .

أ) من أجل كل تمثيل داخلي u لـ L ، أثبت وجود جملة وجملة وحيدة من التمثيلات :

$$u_{ij} : M_i \to M_j \qquad (1 \le i, j \le n)$$

بحيث يكون لدينا :

$$u(x) = u_{1j}(x) + \dots + u_{nj}(x)$$

من أجل كل $x \in M_j$ ومن أجل كل j بحيث $1 \le j \le n$. وبالعكس أثبت أنه إذا إعطيت جملة تمثيلات من النوع السابق يوجد تمثيل وتمثيل وحيد داخلي لـ L يحقق الشروط السابقة .

ب) نرفق كل تمثيل داخلي u لـ L «بالمصفوفة»

$$\begin{pmatrix} u_{11} & \dots & u_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ u_{1n} & \dots & u_{nn} \end{pmatrix}$$

المكونة بالتمثيلات المعرفة في السؤال أ) . ليكن u و v تمثيلين داخليين لـ L . كيف تحسب «مصفوفة» $v \circ u$ بدلالة مصفوفتي u و v ؟

2. ليكن $r \ge 1$ عدداً طبيعياً معطى و r_1 ، ... ، r_n أعداد طبيعية ≥ 1 معطاة بحيث :

$$r = r_1 + \ldots + r_n$$

لتكن :

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \ldots\ldots \\ a_{1r} \ldots a_{rr} \end{pmatrix}$$

مصفوفة مربعة ذات عناصر من حلقة ما K . نشير بِـ U_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ للمصفوفة (ذات r_i عموداً و r_j سطراً) المكونة من العناصر a_{pq} المأخوذة من المصفوفة U والتي تكون من أجلها المتراجحات التالية محققة :

$$r_1 + \ldots + r_{i-1} < p \le r_1 + \ldots + r_i$$

$$r_1 + \ldots + r_{j-1} < q \le r_1 + \ldots + r_j$$

وهذا يسمح ، بإستخدام إصطلاحات واضحة ، أن نكتب U على الشكل :

$$\mathrm{U} = \begin{pmatrix} .\mathrm{U}_{11} \ldots \mathrm{U}_{n1} \\ \ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{U}_{1n} \ldots \mathrm{U}_{nn} \end{pmatrix}$$

لتكن V مصفوفة مربعة أخرى من الرتبة n وذات عناصر من K ، ولتكن $W = V\mathrm{U}$ المصفوفة جداء المصفوفتين . أثبت أن «الكتل» w_{ij} التي تكون w تعطى بالدستور :

$$w_{ij} = V_{1j}\,\mathrm{U}_{i1} + \ldots + V_{nj}\,\mathrm{U}_{in}$$

الذي يشبه القاعدة المألوفة لحساب المصفوفات («دستور الضرب بالكتل» للمصفوفات) . هل يمكن توسيع هذه النتيجة إلى جداء المصفوفات المستطيلة؟

3. أثبت أن منقولة المصفوفة U تعطى ، برموز التمرين السابق ، بالدستور :

$${}^t\mathrm{U} = \begin{pmatrix} {}^t\mathrm{U}_{11} \ldots {}^t\mathrm{U}_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots \\ {}^t\mathrm{U}_{1n} \ldots {}^t\mathrm{U}_{nn} \end{pmatrix}$$

4. ليكن K حقلاً تبديلياً . نعتبر المصفوفة المربعة :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1_n \\ 1_n & 0 \end{pmatrix}$$

(حيث 0 هي المصفوفة المعدومة ذات n سطراً و n عموداً) ، ونبحث عن المصفوفات المربعة :

$$U = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

من الرتبة $2n$ وذات أمثال في K بحيث :

$$^tU \cdot J \cdot U = J$$

(حيث D ، C ، B ، A مصفوفات مربعة من الرتبة n وذات عناصر من K) . أكتب العلاقات التي يجب أن تحققها A ، B ، C ، D . أوجد المصفوفات U بحيث $C = 0$.

5. لتكن $S = {}^tS$ مصفوفة متناظرة مربعة من الرتبة n وذات عناصر من K . حيث K حقل تبديلي . نضع :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1_p \\ 0 & S & 0 \\ 1_p & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(بحيث أن J مصفوفة مربعة من الرتبة $n + 2p$.) .

ما هي الشروط التي تجعل المصفوفة :

$$M = \begin{pmatrix} U & X & Z \\ 0 & V & Y \\ 0 & 0 & W \end{pmatrix}$$

(حيث تجزئة M إلى كتل هي من نوع تجزئة J إلى كتل) تحقق العلاقة : $^tM \cdot J \cdot M = J$ ؟

6. لتكن K حلقة و r_1 ، ... ، r_n أعداد طبيعية ≤ 1 . نضع $r = r_1 + \ldots + r_n$ ونعتبر المصفوفات :

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} \ldots U_{n1} \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ U_{1n} \ldots U_{nn} \end{pmatrix}$$

(مع U_{ij} ذات r_i عموداً و r_j سطراً) التي تحقق الشروط التالية :

$$U_{ij} = 0 \quad \text{من أجل} \quad i < j$$

ثم أن المصفوفات U_{ii} قابلة للقلب. أثبت أن المصفوفات U تشكل زمرة جزئية من الزمرة الخطية $GL(r, K)$. نفس السؤال بالنسبة للمصفوفات بحيث:

$$U_{ij} = 0 \text{ إذا كان } i < j \text{ و } U_{ii} = 1$$

أثبت أن الزمرة الجزئية الثانية لا متغيرة في الأولى وأنها مكونة من مصفوفات وحيدة القوة.

7. ليكن $L = M_1 \oplus \dots \oplus M_p$ نشر مقياس من اليسار L على حلقة K إلى مجموع مباشر من المقاييس الجزئية. في المقياس من اليمين L^*، ثنوي L، نعتبر من أجل كل i بحيث $1 \leq i \leq p$ المجموعة M'_i المكونة من الأشكال الخطية f على L بحيث:

$$f(M_j) = 0 \quad \text{من أجل كل} \quad i \neq j \, .$$

أثبت أن المجموعات M'_i مقاييس جزئية من L^*

وأن $L^{*.*} = M'_1 \oplus \dots \oplus M'_p$

8. ليكن M مقياساً من اليسار على حلقة K و M' مقياساً جزئياً من M. نفرض أن المقياس الحاصل M/M' (§§ 10، 11 التمرين 10) حر وأنه من النوع المنتهي. أثبت عندئذٍ أن M' عامل مباشر في M (إعتبر المقياس الجزئي من M المولد عن العناصر التي تشكل صورها في M/M' أساساً في M/M' من أجل تطبيق مهم لهذه النتيجة. إنظر § 29، التمرين 11، ز).

م 9. ليكن M مقياساً من اليسار على حلقة K و a عنصراً من M بحيث تستلزم $\lambda a = 0$ أن $\lambda = 0$؛ حتى يكون المقياس الجزئي Ka المولد عن a عاملاً مباشراً في M يلزم ويكفي أن يوجد على M شكل خطي f بحيث $f(a) = 1$؛ فلدينا عندئذٍ:

$$M = Ka \oplus \operatorname{Ker}(f)$$

م 1. أثبت أن كل زمرة جزئية من النمط المنتهي من الزمرة الجمعية Q^n تحتوي على أساس ذي n عنصراً على الأكثر (قلد برهان النظرية 1) .

م 2. حتى يوجد أساس لـ Z^n يحتوي على عنصر معطى $(a_1, \ldots, a_n)$ من Z^n ، يلزم ويكفي أن تكون الأعداد الصحيحة a_i أولية فيما بينها (إختر عناصر $u_i \in Z$ بحيث $\sum u_i a_i = 1$ ثم اعتبر الزمرة الجزئية من Z^n المعرّفة بالمعادلة $\sum u_i x_i = 0$) .

وبوجه أعم ، لتكن K حلقة ؛ حتى يوجد أساس لـ K^n يحتوي على عنصر $a \in K^n$ معطى ، فمن الضروري أن يوجد شكل خطي f على K^n بحيث $f(a) = 1$ ، ويكون هذا الشرط كافياً إذا كانت K رئيسية (إنظر § 17 ، التمرين 9) .

م 3. حتى توجد مصفوفة $U \in GL(n, Z)$ ، سطرها الأول :

$$a_{11} \ldots a_{21} \ldots a_{n1} ،$$

معطى يلزم ويكفي أن تكون الأعداد الصحيحة a_{11} ، a_{21} ، … ، a_{n1} أولية فيما بينها .

م 4. ليكن L و M مقياسين من النمط المنتهي على حلقة تبديلية ونوثرية K . أثبت أن الـ K - مقياس $\mathrm{Hom}_K(L, M)$ من النمط منتهي (أشيد تمثيلاً متبايناً لهذا المقياس في قوة ملائمة لـ M) .

م 5. ليكن M مقياساً من النمط المنتهي على حلقة نوثرية K . أثبت أن كل متتالية متزايدة من المقاييس الجزئية من M مستقرة وأن كل مجموعة مكونة من مقاييس جزئية من M تملك عنصرا اعظميا على الاقل .

م م6. ليكن a مثالياً من حلقة نوثرية K وتبديلية . أثبت وجود متتالية منتهية من مثاليات أولية $p_1, \dots, p_n$ (سواء كانت مختلفة مثنى مثنى أم لا) من K بحيث يكون لدينا :

$$p_1 \dots p_n \subset a$$

(إستدل بطريقة المستحيل، إعتبر عنصراً أعظمياً من مجموعة المثاليات لا يتمتع بهذه الخاصية ، ثم طبق عليه التمرين 11، من § 8) .

م م7. ليكن K حقلاً تبديلياً و A حلقة جزئية من K وتقبل K كحقل كسور (معناه أن يكون كل عنصر $x \in K$ يساوي كسراً مكوناً من عنصرين من A) .

نستعمل فيما يلي تعاريف ونتائج التمرين 14 من §§ 10 ، 11 .

أ) إذا كانت A حلقة لِديد كيند، تكون A حلقة نوثرية

ب) نفرض A نوثرية وأن كل مثالي أعظمي من الحلقة A قابل للقلب، أثبت أن كل مثالي من A جداء عدد منته من مثاليات أعظمية (طريقة مماثلة لطريقة التمرين السابق) . إستنتج أن A حلقة لِديد كيند .

ج) لتكن A حلقة لِديد كيند، أثبت أن كل مثالي كسري من A يكتب على شكل جداء منته لقوى (موجبة أو سالبة) مثاليات أولية من A ، وأن هذا النشر وحيد بإستثناء إمكانية تغيير ترتيب العوامل .

د) ليكن p مثالياً أولياً من حلقة ديد كيند A . من أجل كل $x \in K$ غير معدوم، نشير بـ$v_p(x)$ لأس (يمكن أن يكون معدوماً) p في نشر المثالي الكسري Ax من A على شكل جداء عوامل أولية ؛ وتعرف $v_p(0) = +\infty$. أثبت أن التابع v_p تقييم منفصل (§ 8 . التمرين 6) على الحقل K .

م8. لتكن K حلقة تبديلية نوثرية، M مقياساً على K من النوع المنتهي و u التحاكي ذا النسبة $a \in K$ في M المعطى بالعلاقة :

$u(x) = ax$ من أجل كل $x \in M$.

أ) أثبت وجود عدد طبيعي $p \geq 0$ بحيث لدينا
$\text{Ker}(u^n) = \text{Ker}(u^{n+1})$ من أجل كل $n \geq p$ (استعمل التمرين 5) .

ب) أثبت أن $\text{Im}(u^n) \cap \text{Ker}(u) = \{0\}$ من أجل كل $n \geq p$.

ج) نقول عن المقياس M إنه «إبتدائي» إذا كان كل تحاك في M إما متبايناً وإما عديم القوة. اثبت أنه كذلك لما يتمتع المقياس M بالخاصية التالية : إن تقاطع مقياسين جزئيين غير معدومين من M غير معدوم دوماً .

د) ليكن q مثالياً من الحلقة K . حتى يكون q إبتدائياً (§ 8 ، التمرين 13) يلزم ويكفي أن يكون الحاصل K/q ، الذي يعتبر كمقياس على K ، إبتدائياً .

هـ) نقول عن مثالي q من حلقة K إنه غير قابل للإختصار إذا كان $q \neq K$ ومهما كان المثاليان a و b من K ، العلاقة :

$a \cap b = q$ تستلزم أن $a = q$ أو $b = q$.

أثبت أن كل مثالي غير قابل للإختصار من حلقة نوثرية إبتدائي .

ملحوظة : العكس غير صحيح .

م م 9. لتكن K حلقة تبديلية نوثرية .

أ) أثبت أن كل مثالي $a \neq K$ يساوي تقاطعاً منتهياً من مثاليات غير قابلة للإختصار (طريقة التمرين 6) .

ب) إستنتج أن كل مثالي من حلقة تبديلية نوثرية يساوي تقاطع مثاليات إبتدائية (إمي نوثر) .

م م 10. ليكن M مقياساً من النمط المنتهي على حلقة تبديلية نوثرية K . نقول عن مثالي أولي p من K إنه «شريك» مع M إذا وجد عنصر $x \in M$ بحيث يكون p معدماً لِـ x في M (معناه أن العلاقة $a \in p$ تكافئ العلاقة $ax = 0$) .

أ) إذا كان $M \neq \{0\}$ ، يوجد على الأقل مثالي أولي شريك مع M (إعتبر معدمات العناصر غير المعدومة من M ثم خذ عنصراً أعظمياً منها) .

ب) توجد متتالية متزايدة :

$$0 = M_0 \subset M_1 \subset \ldots \subset M_r = M$$

من مقاييس جزئية من M ومثاليات أولية $p_1, \ldots, p_r$ من K بحيث يكون M_i / M_{i-1} متشاكلا مع المقياس الحاصل K/p_i من أجل كل i بحيث $1 \leq i \leq r$ (لاحظ أنه إذا كان معدم عنصراً x من مقياس مثالياً a من K ، يكون عندئذ المقياس الجزئي Kx المولد عن x متشاكلاً مع K/a .

جـ) الرموز هي تلك المستعملة في السؤال السابق إن كل مثالي أولي شريك مع M هو أحد المثاليات p_i .

د) ليكن $u(x) = \alpha . x$ مع $\alpha \in K$ تحاكياً في M . حتى يكون u متباينا ، يلزم ويكفي أن ينتمي α إلى كل المثاليات الأولية الشريكة مع M .

هـ) نأخذ فيما سبق $M = K$ ونرمز بـ $p_1, \ldots, p_r$ للمثاليات الأولية الشريكة مع M . أثبت أن :

$$p_1 \cup \ldots \cup p_r$$

هي مجموعة قواسم الصفر في K وأن :

$$p_1 \cap \ldots \cap p_r$$

هي مجموعة العناصر عديمة القوة من K .

اثبت أن كل مثالي أولي من K يحتوي على أحد العناصر p_i . إستنتج أن تقاطع جميع المثاليات الأولية يساوي مجموعة العناصر عديمة القوة وهذا في كل حلقة نوثرية (تعمم هذه النتيجة لتشمل الحلاقات التبديلية : §§ 27 ، 28 ، التمرين 9) .

م م 11. ليكن a مثالياً من حلقة تبديلية نوثرية A، نفرض $A \neq a$. نسمي «مثالياً أولياً أصغرياً» لـ a كل مثالي أولي p من A يحتوي على a ولا يحتوي على أي مثالي أولي يحتوي a إلا نفسه.

إثبت أن عدد المثاليات الأولية الأصغرية لـ a منته وأن تقاطعها هو جذر a (§ 8 التمرين 12) (طبق على a و A السؤال a) من التمرين السابق). (يرجع إختراع الحلقات النوثرية إلى نحو 1920 من طرف إمي نوثر وكانت هذه الحلقات أحد القطع الأساسية لانطلاق الجبر «المجرد» العصري. ونظرية هذه الحلقات - المتطورة الآن بصورة خارقة - هي أساس الهندسة الجبرية لكن هذه الحلقات إستعمالات إخرى، مثلاً في نظرية التوابع التحليلية لعدة متحولات عقدية؛ وفي الحقيقة إن إختراع الحلقات هو بدون شك أحد الإكتشافات الرياضية الأكثر فائدة في عصرنا هذا. قبل إدخال الحلقات النوثرية كان الرياضيون يكتفون ببرهان بعض خواصها على حلقات كثيرات الحدود - وكان هذا يؤدي في غالب الأحيان إلى براهين معقدة أكثر من البراهين المعروفة الآن وهذا لأن الفكرة الأساسية التي تسمح بإختصارها لم تستخرج بعد).

1. نعتبر في $\mathbf{R}^4$ الأشعة :

$(1, 0, 0, -1)$ ، $(2, 1, 1, 0)$ ، $(1, 1, 1, 1)$ ، $(1, 2, 3, 4)$ ، $(0, 1, 2, 3)$ ؛

إستخرج من هذه الأشعة أساساً للفضاء الشعاعي الجزئي المولد عنها .

2. نعتبر في $\mathbf{R}^4$ الفضاء الجزئي L المولد عن الأشعة :

$(1, 1, 1, 1)$ ، $(1, -1, 1, -1)$ ، $(1, 3, 1, 3)$

والفضاء الجزئي M المولد عن :

$(1, 2, 0, 2)$ ، $(1, 2, 1, 2)$ ، $(3, 1, 3, 1)$ ؛

احسب عدد أبعاد $L \cap M$ وعدد أبعاد $L + M$.

3. ليكن V فضاء شعاعياً ذا n بعداً على حقل ما و L فضاء جزئياً ذا r بعداً من V . حتى يكون فضاء شعاعياً ما M من V مكملاً لِـ L في V يلزم ويكفي أن يكون :

$L \cap M = \{0\}$ و $\dim(M) = n - r$.

4. ليكن V فراغاً شعاعياً منتهي الأبعاد على حقل ما و $(a_i)_{1 \le i \le n}$ أساساً لِـ V و x_1 ، ... ، x_r عناصر من V عددها $r \le n$. حتى تكون الأشعة x_i مستقلة خطياً يلزم ويكفي أن يوجد تشاكل ذاتي u في V بحيث

$u(a_i) = x_i$ من أجل $1 \le i \le r$.

م5. ليكن L و M فضاءين شعاعيين منتهي الأبعاد على حقل K ، و f تمثيلاً لـ L في M مرتبته r . أثبت وجود أساس $(a_i)_{1 \leq i \leq p}$ لـ L وأساس $(b_j)_{1 \leq j \leq q}$ لـ M بحيث تكون لدينا العلاقات :

$$f(a_i) = b_i \text{ من أجل } 1 \leq i \leq r$$
$$f(a_i) = 0 \text{ من أجل } r + 1 \leq i \leq p$$

إستنتج النتيجة التالية : لتكن A مصفوفة ذات q سطراً و p عموداً وذات عناصر من K ، ومرتبتها r ، فتوجد عندئذٍ مصفوفتان :

$$GL(q, K) \ni \cup \quad \text{و} \quad GL(p, K) \ni v$$

بحيث :

$$\cup\, A\, V = \begin{pmatrix} 1_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(الأصفار 0 الموجودة على اليمين تشير إلى المصفوفات المعدومة التي لها العدد المطلوب من السطور والأعمدة لكي تكون مصفوفة الطرف الأيمن ذات q سطراً و p عموداً) .

لتكن A و B مصفوفتين ذات q سطر و p عمود وعناصرهما من K ؛ حتى توجد مصفوفتان $GL(q, K) \ni \cup$ و $GL(p, K) \ni V$ بحيث $B = \cup\, A\, V$ يلزم ويكفي أن تكون A و B من نفس المرتبة .

6. ليكن E و F فضاءين شعاعيين جزئيين من فضاء شعاعي V منتهي الأبعاد ؛ حتى يوجد تشاكل ذاتي u في V بحيث $F = u(E)$ ، يلزم ويكفي أن يكون $\dim(E) = \dim(F)$.

7. لتكن x_1 ، ... ، x_n عناصراً من فضاء شعاعي ؛ نفرض x_1 ، ... ، x_r مستقلة خطياً وأن لدينا العلاقات :

$$x_j = \varrho_{j1}\, x_1 + \dots + \varrho_{jr} \quad (r + 1 \leq j \leq n)$$

ليكن L فضاء العلاقات الخطية بين x_1 ، ... ، x_n ، معناه جمل العناصر السلمية $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ بحيث :

$$\lambda_1\, x_1 + \dots + \lambda_n\, x_n = 0$$

أثبت أن العناصر :

$$(\varrho_1, ..., \varrho_{jr}, 0, ..., 0, -1, 0, ..., 0)$$

– حيث 1 – واقع في المكان ذي المرتبة j ، والتي عددها $n - r$ تشكل أساساً لـ L .

8. لتكن f_1 ، ... ، f_n أشكالاً خطية على فضاء شعاعي ؛ حتى تقبل جملة المعادلة :

$$f_i(x) = \beta_i \quad (1 \le i \le n)$$

حلاً على الأقل ، يلزم ويكفي أن يكون لدينا :

$$\lambda_1 \beta_1 + ... + \lambda_n \beta_n = 0$$

من أجل كل علاقة خطية $(\lambda_1$ ، ... ، $\lambda_n)$ بين $f_1, ..., f_n$.

9. ليكن K حقلاً تبديلياً .

أ) حتى يحقق الشكل الخطي f على $M_n(K)$ ، الذي ننظر إليه كفضاء شعاعي ذي n^2 بعداً على K ، العلاقة :

$$f(XY) = f(YX) ،$$

يلزم ويكفي أن يوجد عنصر سلمي $\lambda \in K$ بحيث :

$$f(X) = \lambda \cdot Tr(X) \quad \text{من أجل كل} \quad X \in M_n(K)$$

(نذكر – §12 ، التمرين 8 – أن $Tr(X)$ يشير إلى مجموع العناصر القطرية في X) .

ب) إستنتج من هذا ومن النظرية 3 من §19 النتيجة التالي : حتى يمكن كتابة مصفوفة $A \in M_n(K)$ كمجموع مصفوفات من الشكل $XY - YX$ ، يلزم ويكفي أن يكون لدينا :

$$Tr(A) = 0 .$$

10. ليكن V فضاء شعاعياً منتهي الأبعاد على حقل K و $(a_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ أساساً لـ V .

أ) ليكن x عنصراً غير معدوم من V . أثبت (بدون إستخدام نتائج 19§) وجود دليل i بحيث تشكل أيضاً الأشعة $x, a_{i+1}, \ldots, a_n$ ، $a_1, \ldots, a_{i-1}$ أساساً في V .

ب) لتكن $x_1, \ldots, x_p$ أشعة مستقلة خطياً في V . إعتماداً على السؤال أ) وبالتدرج على p ، أثبت وجود أساس في V مكون من p شعاع x_j ومن $n - p$ شعاع a_i . إستنتج برهاناً جديداً للمطرحتين 7، 6 من 19§ .

11. برهن مباشرة على نتيجة النظرية 7 بالإستدلال بالتدرج على p (إستعمل إحدى المعادلات لتكتب أحد المجاهيل بدلالة ما تبقى من المجاهيل الأخرى البالغ عددها $p - 1$ ، وهذا يرجع إلى جملة $n - 1$ معادلة ذات $p - 1$ مجهولاً) .

م12. ليكن L و M فضاءين شعاعيين منتهيي الأبعاد على حقل ما ، f تطبيقاً خطياً لـ L في M ، و :

$$^{t}f : M^* \to L^*$$

التطبيق المنقول (16§) . أثبت أن $\mathrm{Im}(^{t}f)$ هو الفضاء الجزئي من L^* العمودي على $\mathrm{Ker}(f)$. وأن $\mathrm{Ker}(^{t}f)$ هو الفضاء الجزئي من M^* العمودي على $\mathrm{Im}(f)$ (إستخدم النظرية 3) إستنتج من هذا أن لـ f ولمنقولها نفس المرتبة ، ثم طبق هذه النتيجة لتحصل على برهان آخر لنتيجة النظرية 16 . أثبت أنه إذا كان f تمثيلاً داخلياً لـ L ، يكون أبعاد نواتي f و ^{t}f متساويين .

13. ليكن K حقلاً . حتى تكون المصفوفة $A \in M_n(K)$ قابلة للقلب ، يلزم ويكفي أن لا تكون A من قواسم الصفر في الحلقة $M_n(K)$.

14. لتكن X مصفوفة ذات عناصر في حقل ما . أثبت أن مرتبة X لا تتغير لما يضاف إلى سطرٍ ما (عمود ما ، على التوالي) من X أية عبارة خطية

في سطور (أعمدة على التوالي) X ، أو لما يجري أي تبديل في سطور (أعمدة على التوالي) X .

15. ليكن V فضاء شعاعياً عقدياً منتهي الأبعاد و $(a_k)_{1\leq k\leq n}$ أساساً لِـ V . بالنظر إلى V كفضاء شعاعي حقيقي ، أثبت أن الأشعة :

$$a_1, \ldots, a_n, ia_1, \ldots, ia_n$$

والتي عددها $2n$ تشكل أساساً لِـ V على $\mathbf{R}$. إستنتج أن :

$$\dim_{\mathbf{R}}(V) = 2\dim_{\mathbf{C}}(V)$$

م**16.** ليكن L حقلاً و K حقلاً جزئياً من L ، نقول عن L إنه «توسيع منته» لِـ K إذا كان L ، الذي ينظر اليه كفضاء شعاعي على K ، منتهي الأبعاد ، فيدعى عندئذٍ عدد الأبعاد هذا «بدرجة L على K ، ويرمز له بـ $[L:K]$.

ليكن V فضاء شعاعياً منتهي الأبعاد على L بالنظر إلى V كفضاء شعاعي على K ، إثبت أنه ، إذا كان L توسيعاً منتهياً لِـ K ، فإن لدينا :

$$\dim_K(V) = [L:K]\cdot\dim_L(V)$$

(قلد إستدلال التمرين السابق) .

ليكن K حقلاً و L حقلاً توسيعياً منتهياً لِـ K ، و M حقلاً توسيعياً منتهياً لِـ L . أثبت أن M توسيع منته لِـ K و أن :

$$[M:K] = [M:L]\cdot[L:K]$$

17. لتكن :

$$L_1 \xrightarrow{f_1} L_2 \xrightarrow{f_2} L_3 \ldots \xrightarrow{f_n} L_{n+1}$$

متتالية مكونة من فضاءات شعاعية منتهية الأبعاد على حقل ما ومن تمثيلات لكل فضاء في الفضاء الذي يليه . نفرض f_1 متبايناً و f_n غامراً وأن :

$1 \leq i \leq n$ من أجل $\text{Im}(f_i) = \text{Ker}(f_{i+1})$

أثبت حينئذٍ أن :

$$\dim(L_1) - \dim(L_2) + \dim(L_3) - \ldots + (-1)^n \dim(L_{n+1}) = 0$$

م18. ليكن p عدداً أولياً . ما هي الشروط التي يجب أن تتحقق من طرف العددين الصحيحين u و v لكي يمكن حل التوفيقين :

$$x + 2y + 3z \equiv u \pmod{p}$$
$$4x + 5y + 6z \equiv v \pmod{p}$$ ؟

م19. ليكن V فضاء شعاعياً منتهي الأبعاد على حقل ما وليكن n عدد أبعاده .

أ) لتكن L_1 ، ... ، L_r فضاءات جزئية من V بحيث :

$$L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_r = V$$ ؛

نضع $\dim(L_i) = d_i$ ؛ أثبت وجود أساس في V بحيث تشكل العناصر الأولى من هذا الأساس البالغ عددها d_i أساساً لِـ L_i من أجل كل i .

ب) ليكن u تمثيلاً ذاتياً لِـV عديم القوة معناه $u^k = 0$ من أجل عدد طبيعي k على الأقل . ليكن r أصغر عدد طبيعي غير معدوم بحيث :

$$u^r = 0$$ ؛

نضع :

$$L_1 = \text{Ker}(u), L_2 = \text{Ker}(u^2), \ldots, L_r = \text{Ker}(u^r)$$

أثبت أن هذه الفضاءات الجزئية من V تحقق شروط السؤال أ) . إستنتج أنه يوجد أساس لِـV بحيث تكون مصفوفة u بالنسبة له من الشكل(*) .

(*) سنجد في 35 § نتيجة أدق

$$\begin{pmatrix} 0 & * & * & * \dots * \\ 0 & 0 & * & * \dots * \\ 0 & 0 & 0 & * \dots * \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

ادرس العكس .

جـ) لتكن $M_n(K) \ni N$ مصفوفة عديمة القوة . اثبت وجود مصفوفة $GL(n, K) \ni U$ بحيث

$$U N U^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & * & * \dots * \\ 0 & 0 & * \dots * \\ & \dots & \\ 0 & 0 & 0 \dots 0 \end{pmatrix}$$

ادرس العكس .

م م 20. ليكن V فضاء شعاعياً ذا n بعداً على $\mathbf{Q}$ ولتكن M زمرة جزئية من النمط المنتهي من V .

أ) أثبت وجود أساس لِـ V بحيث تكون مركبات كل $M \ni x$ بالنسبة له صحيحة .

ب) أثبت وجود عدد طبيعي $n \geq r$ بحيث تكون M الزمرة الجزئية من V المولدة عن r عنصر من V مستقلة خطياً مختارة بطريقة مناسبة (وبعبارة أخرى تكون الزمرة M متشاكلة مع $\mathbf{Z}^r$ من أجل $n \geq r$) . (إستخدم النظرية 3 من § 18) .

جـ) ليكن $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ أساساً لِـ V . بين أنه يوجد أساس $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ لِـ V بحيث (1) تكون M مولدة عن b_1 ، ... ، b_r (2) تكون مصفوفة الإنتقال من الأساس (a_i) إلى الأساس (b_i) مثلثية (قلد برهان النظرية 3 من § 18) .

د) إستنتج أن كل مصفوفة $M_n(\mathbf{Q}) \ni X$ تساوي جداء مصفوفة $GL(n, \mathbf{Z}) \ni U$ ومصفوفة مثلثية .

م 21. لتكن A و B مصفوفتين مربعتين من الرتبة n وعناصرهما من حقل ما . أثبت أن :

$$rg(A) + rg(B) - n \leq rg(AB) \leq \min\{rg(A), rg(B)\}$$

(متراجحات سيلفستر) .

22. ليكن u تمثيلاً داخلياً لفضاء شعاعي V منتهي الأبعاد على حقل تبديلي K ؛ أثبت أن :

$$Tr(A) = Tr(B)$$

إذا كانت A و B مصفوفتين لـ u بالنسبة لأساسين مختلفين لـ V . (§12 التمرين 8) . تدعى القيمة المشتركة لآثار مصفوفات u بالنسبة لأسس V المختلفة «بأثر التمثيل الداخلي u» ويرمز له بـ $Tr(u)$.

بين أن :

$Tr(u + v) = Tr(u) + Tr(v)$ ، $Tr(\lambda u) = \lambda Tr(u)$ مهما كان $\lambda \in K$:

$Tr(u \circ v) = Tr(v \circ u)$ ، $Tr(j_V) = \dim V$.

ثم أن هذه الخواص تعين التطبيق :

$$Tr : \mathcal{L}(V) \to K$$

تعييناً تاماً ، ثم بين أن :

$$Tr(u) = Tr({}^t u)$$

من أجل كل تمثيل داخلي u لـ V .

م 23. حتى يكون لجملة المعادلات الخطية

$$a_{11} x_1 + \dots + a_{1n} x_n = b_1$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$a_{m1} \dots a_{mn} x_n = b_m$$

التي تكون عواملها من حقل ما ، حل على الأقل ، يلزم ويكفي أن تكون رتبتا المصفوفتين :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \\ \dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1n} \; b_1 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1} \dots a_{mn} \; b_m \end{pmatrix}$$

متساويتين .

م م 24. ليكن L حقلاً تبديلياً و A حلقة جزئية من L ؛ نعتبر L كَـ A مقياس ونفرض أنه من النمط المنتهي ؛ نحن ننوي أن نثبت أن A حقل جزئي من L .

أ) لتكن K مجموعة العناصر x من L التي تكتب على الشكل u/v مع u و v من A و $v \neq 0$.

أثبت أن K حقل جزئي من L وأن L منتهي الأبعاد كفضاء شعاعي على K .

ب) لتكن $(u_1, ..., u_n)$ جملة مولدات للـ A مقياس L ؛ نختار أساس $(v_0, v_1, ..., v_r)$ لِـ L المعتبر كفضاء شعاعي على K وهذا بحيث يكون $v_0 = 1$ ثم نضع :

$$u_i = \sum_{0 \leq j \leq r} x_{ij} \; v_j$$

مع العناصر $x_{ij} \in K$. أثبت أن الـ A – مقياس K مولد عن العناصر x_{i0} .

ج) إختم البرهان بالإعتماد على التمرين 9 من §§ 10 و 11 .

حل جمل معادلات الخطية التالية(*) بإستخدام طريقة الحذف المتتالي (التي تكمن في إستخدام معادلة لحساب مجهول بدلالة المجاهيل الأخرى ، ثم نقل النتيجة المحصل عليها في المعادلات الأخرى بحيث تتحول الجملة الإبتدائية إلى جملة تنقصها معادلة ومجهول) .

.1
$$\begin{aligned} 2x - y + 3z &= 9 \\ 3x - 5y + z &= -4 \\ 4x - 7y + z &= 5 \end{aligned}$$

.2
$$\begin{aligned} 2x + 3y + 5z &= 10 \\ 3x + 7y + 4z &= 3 \\ x + 2y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

.3
$$\begin{aligned} 5x + 2y + 3z &= -2 \\ 2x - 2y + 5z &= 0 \\ 3x + 4y + 2z &= -10 \end{aligned}$$

.4
$$\begin{aligned} 4bcx + acy - 2abz &= -0 \\ 5bcx + 3acy - 4abz &= -abc \\ 3bcx + 2acy - abz &= 4abc \end{aligned}$$
(نفرض أن $abc \neq 0$)

(*) إن حقل الأساس في التمارين من 1 إلى 17 (المأخوذة من كتاب بروسكورجكوف حيث تجد تمارين أخرى) هو C . إلا أنه يمكن للقارئ الذي يرغب في إدخال المزيد من التفنن في الحسابات أن يعتبر أي حقل تبديلي K كحقل أساسي وأن يأخذ ميزته بعين الاعتبار ؛ أو أن يبحث عن الحلول في حلقة الأعداد الصحيحة Z وهذا كلما كان للمسألة معنى . ثم إنه طبيعي من جهة أخرى أن يستعمل القارئ المعينات ، بعد دراستها لحل هذه التمارين .

5.

$$\begin{aligned} x + y + z &= a \\ x + wy + w^2 z &= b \\ x + w^2 y + wz &= c \end{aligned}$$

(حيث w جذر تكعيبي للوحدة)

6.

$$\begin{aligned} ax - 3y + 5z &= 4 \\ x - ay + 3z &= 2 \\ 9x - 7y + 8az &= 0 \end{aligned}$$

(ناقش حسب قيم a)

7.

$$\begin{aligned} ax + 2z &= 2 \\ 5x + 2y &= 1 \\ x - 2y + bz &= 3 \end{aligned}$$

(ناقش حسب قيم a و b)

8.

$$\begin{aligned} 2x + 2y - z + t &= 4 \\ 4x + 3y - z + 2t &= 6 \\ 8x + 5y - 3z + 4t &= 12 \\ 3x + 3y - 2z + 2t &= 6 \end{aligned}$$

9.

$$\begin{aligned} 2x - y - 6z + 3t &= -1 \\ 7x - 4y + 2z - 15t &= -32 \\ x - 2y - 4z + 9t &= 5 \\ x - y + 2z - 6t &= -8 \end{aligned}$$

10.

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 3z + t &= 5 \\ 3x - 7y + 3z - t &= -1 \\ 5x - 9y + 6z + 2t &= 7 \\ 4x - 6y + 3z + t &= 8 \end{aligned}$$

11.

$$\begin{aligned} 6x + 6y + 5z + 18t + 20u &= 14 \\ 10x + 9y + 7z + 24t + 30u &= 18 \\ 12x + 12y + 13z + 27t + 35u &= 32 \\ 8x + 6y + 6z + 15t + 20u &= 16 \\ 4x + 5y + 4z + 15t + 15u &= 11 \end{aligned}$$

12.

$$\begin{aligned} 2x + 7y + 3z + t &= 5 \\ x + 3y + 5z - 2t &= 3 \\ x + 5y - 9z + 8t &= 1 \\ 5x + 18y + 4z + 5t &= 12 \end{aligned}$$

.13

$$\begin{aligned} 2x + 5y - 8z &= 8 \\ 4x + 3y - 9z &= 9 \\ 2x + 3y - 5z &= 7 \\ x + 8y - 7z &= 12 \end{aligned}$$

.14

$$\begin{aligned} 6x + 3y + 2z + 3t + 4u &= 5 \\ 4x + 2y + z + 2t + 3u &= 4 \\ 4x + 2y + 3z + 2t + u &= 0 \\ 2x + y + 7z + 3t + 2u &= 1 \end{aligned}$$

(عين أيضاً جميع الحلول الصحيحة لهذه الجملة الأخيرة)

.15

$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + 2t &= 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t &= 5 \\ 6x + 9y + 5z + 6t &= 7 \\ 8x + 12y + 7z + \lambda t &= 9 \end{aligned}$$

(ناقش حسب قيم λ)

.16

$$\begin{aligned} ax + y + z &= 1 \\ x + ay + z &= 1 \\ x + y + az &= 1 \end{aligned}$$

(ناقش حسب قيم a)

.17

$$\begin{aligned} (a + 1)x + y + z &= a^2 + 3a \\ x + (a + 1)y + z &= a^3 + 3a^2 \\ x + y + (a + 1)z &= a^4 + 3a^2 \end{aligned}$$

(ناقش حسب قيم a)

.18 ليكن K حقلاً. نعتبر من جهة الجملة

$$(1) \qquad \left| \begin{aligned} a_{11} x_1 + \dots + a_{n1} x_n &= b_1 \\ a_{n1} x_1 + \dots + a_{nn} x_n &= b_n \end{aligned} \right.$$

ذات n معادلة خطية و n مجهولاً وعناصر من K. ثم نعتبر من جهة أخرى الجملة المتجانسة ذات n معادلة خطية و $(n + 1)$ مجهولاً:

$$(2) \qquad \left| \begin{aligned} a_{11} y_1 + \dots + a_{n1} y_n - b_1 y_{n+1} &= 0 \\ a_{1n} y_1 + \dots + a_{nn} y_n - b_n y_{n+1} &= 0 \end{aligned} \right.$$

أ) إذا كان حل ما لـ(2) يحقق $y_{n+1} \neq 0$. أثبت أن العنصر:

$$x_i = y_i \, y_{n+1}^{-1}$$

تشكل عندئذٍ حلاً لـ(1) والعكس بالعكس فكل حل لـ(1) يسمح بتشييد حل لـ(2) بحيث $y_{n+1} \neq 0$.

ب) أثبت أن الخاصيتين التاليتين متكافئتان : لا تملك الجملة المتجانسة الملحقة بالجملة (1) أي حل غير تافه ؛ إن كل حل غير تافه لـ(2) يحقق $y_{n+1} \neq 0$.

جـ) بإستخدام نتيجة النظرية 7 من 19 § إستنتج برهان تكافؤ الشرطين أ) و ب) من النظرية 2 من 20 § .

19. إذا كان لجملة خطية ذات عوامل حقيقية حل عقدي على الأقل فيكون لها عندئذٍ حل حقيقي .

م م **20.** ليكن L حقلاً و K حقلاً جزئياً منه .

أ) نعتبر جملة خطية ذات n معادلة متجانسة و n مجهولاً وعوامل من K . أثبت أنه إذا كان للجملة حل غير تافه من L فيكون لها حينئذٍ حل غير تافه من K (إستدل بالتدريج على n بإستعمال ، مثلاً ، طريقة الحذف المتتالي) .

ب) أثبت أنه إذا كانت مصفوفة $A \in M_n(K)$ قابلة للقلب في الحلقة $M_n(L)$ فتكون قابلة للقلب في الحلقة $M_n(K)$.

جـ) إذا كانت عناصر ما من K^n (أشكال خطية على K^n ، على التوالي) مستقلة خطياً على K ، فهي مستقلة خطياً على L والعكس بالعكس .

د) حتى تقبل جملة خطية ، ذات عوامل وطرف ثان من K ، حل من K ، يلزم ويكفي أن تقبل حلاً من L .

هـ) إذا كانت حلول جملة معادلات متجانسة معاملاتها في K ، تنتمي إلى L ، فإنها تكتب على شكل عبارات خطية معاملاتها من L ، في حلول الجملة المعتبرة في K .

ز) إذا كانت جملة معادلات خطية ومتجانسة وذات عوامل من Z تقبل حلاً غير تافه من C فهي تقبل حلاً غير تافه من Z .

م م 1. ليكن V فضاء شعاعياً بعده n منته على حقل تبديلي K ؛ من أجل كل صحيحين p و q في $\mathbf{N}$ ، نرمز بِـ :

$$T_q^p(V)$$

للفضاء الشعاعي المؤلف من الوترات المتغايرة p مرة والمتغيرة عكسياً q مرة على V .

أ) ليكن $(a_i)_{1\leq i\leq n}$ أساساً لِـ V وَ $(a^i)_{1\leq i\leq n}$ الأساس الثنوي لِـ V^* . أثبت أن العناصر :

$$a_{i_1}\otimes\ldots\otimes a_{i_p}\otimes a^{j_1}\otimes\ldots\otimes a^{j_q} \qquad (*)$$

(حيث $i_1,\ldots,j_q$ تأخذ كل القيم المحصورة بين 1 وَ n) تؤلف أساساً للفضاء الشعاعي $T_q^p(V)$ [تنبيه - نجد في المثال 6 من ف 21 القاعدة التي تسمح بمطابقة كل عنصر a من V بوترة من النوع $\binom{1}{0}$ ؛ وهذه القاعدة تلعب دوراً أساسياً في إعطاء معنى للعبارة (*) الواردة أعلاه] .

استنتج أن بعد $T_q^p(V)$ يساوي n^{p+q} على K .

ب) ليكن u تشاكلاً ذاتياً لِـ V . من أجل كل وترة f من $T_q^p(V)$ نعتبر على $(V^*)^p\times V^q$ التابع f' المعطى بِـ :

$$f'(y_1,\ldots,y_p,x_1,\ldots,x_q)=f\left[{}^tu(y_1),\ldots,{}^tu(y_p),u^{-1}(x_1),\ldots,u^{-1}(x_q)\right]$$

مهما كانت العناصر y_j في V^* وَ x_i في V . أثبت أن f' ينتمي

إلى $T_q^p(V)$ وأن التابع $f \to f'$ المعرف على هذا المنوال في $T_q^p(V)$ تابع خطي. نرمز فيما يلي بـ:

$$T_q^p(u)$$

لهذا التطبيق. اثبت أن لدينا:

$$T_q^p(v \circ u) = T_q^p(v) \circ T_q^p(u)$$

مهما كان u وَ v في $GL(V)$. استنتج أن التطبيق $u \to T_q^p(u)$ تماثل من زمرة التشاكلات الذاتية لِـ V في زمرة التشاكلات الذاتية لِـ $T_q^p(V)$.

نضع:

$$u(a_i) = \sum_j \alpha_i^j \, a_j$$

بحيث تكون $(\alpha_i^j)_{1 \leq i,j \leq n}$ مصفوفة u بالنسبة للأساس (a_i) لِـ V. احسب مصفوفة $T_q^p(u)$ بالنسبة لأساس $T_q^p(V)$ المعرف في السؤال أ).

جـ) ليكن u تماثلاً داخلياً لِـ V. من أجل كل وترة f من $T_q^p(V)$ نعرف تابعاً جديداً f'' على $(V^*)^p \times V^q$ وذلك بوضع:

$$f''(y_1, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_q) =$$

$$= \sum_{1 \leq i \leq p} f[y_1, \ldots, y_{i-1}, {}^t u(y_i), y_{i+1}, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_q] -$$

$$- \sum_{1 \leq j \leq q} f[y_1, \ldots, y_p, x_1, \ldots, x_{j-1}, u(x_j), x_{j+1}, \ldots, x_q]$$

اثبت أن لدينا أيضاً f'' في $T_q^p(V)$ وأن التطبيق $f \to f''$ من $T_q^p(V)$ في نفسه تطبيق خطي. نرمز له فيما يلي بـ $D_q^p(u)$. اثبت أن لدينا:

$$D_q^p(u + v) = D_q^p(u) + D_q^p(v)$$

$$D_q^p(u \circ v - v \circ u) = D_q^p(u) \circ D_q^p(v) - D_q^p(v) \circ D_q^p(u)$$

مهما كان التماثلان الداخليان u وَ v لِـ V. إنطلاقاً من مصفوفة u

بالنسبة للأساس (a_i) لـ V ، احسب مصفوفة $D_q^p(u)$ بالنسبة للأساس (*) الوارد في السؤال أ) .

م 2. ليكن V فضاء شعاعياً بعده منته على حقل تبديلي K ، وَ T وترة متغايرة مرتين ومتغيرة عكسياً ثلاث مرات على V . أثبت وجود وترة وحيدة $\cup$ متغايرة مرة واحدة ومتغيرة عكسياً مرتين على V ، مركباتها بالنسبة لكل أساس لـ V معطاة بدلالة مركبات T بالعلاقة :

$$\cup_{jk}^{i} = \sum_{1 \leq h \leq n} T_{jkh}^{ih}$$

اشرح هذه العملية (تقلص وترة T بالنسبة للدليل المتغاير الثاني والدليل المتغير العكسي الثالث) بالنظر إلى $\cup$ وَ T على أنهما شكلان متعددا الخطية .

م 3. لتكن T وترة متغايرة مرتين ومتغيرة عكسياً مرتين . اثبت أن العدد السلمي :

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} T_{ji}^{ij}$$

مستقل عن الأساس المختار لتعريفه .

م م 4. ليكن L وَ M مقياسين على حلقة تبديلية K . نعتبر المقياس :

$$N = K^{(L \times M)}$$

الذي يقبل المجموعة $L \times M$ كأساس له (التمرين 15 ، ف 10 ، 11) ؛ بمطابقة كل عنصر من $L \times M$ بالعنصر الموافق له في N ، نعتبر في N المقياس الجزئي N' المولد عن عناصر N التي تكتب على الشكل :

$$(\lambda' x' + \lambda'' x'', \mu' y' + \mu'' y'') - \lambda' \mu'(x', y') - \lambda' \mu''(x', y'') - $$
$$- \lambda'' \mu'(x'', y') - \lambda'' \mu''(x'', y'')$$

الجداء الموتري للمقياسين L وَ M هو تعريفاً مقياس النسبة N/N' ؛ نرمز له بـ :

$$L \otimes M$$

من أجل كل عنصرين x من L و y من M ، نرمز بـ :

$$x \otimes y$$

لعنصر $L \otimes M = N/N'$ الممثل بالعنصر (x, y) في N

أ) أثبت أن التطبيق :

$$(x, y) \to x \otimes y$$

من $L \times M$ في $L \otimes M$ ثنائي الخطية وأن «الجداءات» $x \otimes y$ تولد المقياس $L \otimes M$.

ب) ليكن f تطبيقاً من $L \times M$ في مقياس كيفي E على K . بيّن أنه لكي يكون f ثنائي الخطية ، يلزم ويكفي أن يوجد تطبيق خطي :

$$\bar{f} : L \otimes M \to E$$

بحيث :

$$f(x, y) = \bar{f}(x \otimes y)$$

مهما كان x في L و y في M ؛ عندئذ يكون التطبيق $\bar{f}$ وحيداً . (تمثل هذه النتيجة الخاصية الأساسية للجداءات الموترية للمقاييس وتساعد هذه الجداءات على إعادة دراسة التطبيقات الثنائية الخطية إلى دراسة التطبيقات الخطية) .

جـ) نفرض أن L و M حران ومن صنف منته ؛ ليكن $(a_i)_{1 \le i \le p}$ أساساً لـ L و $(b_j)_{1 \le j \le q}$ أساساً لـ M ؛ أثبت أن الجداءات :

$$a_i \otimes b_j \qquad (1 \le i \le p, 1 \le j \le q)$$

تشكل أساساً لـ $L \otimes M$. استنتج أن :

$$\dim(L \otimes M) = \dim(L) \cdot \dim(M)$$

عندما يكون K حقلاً .

د) أثبت وجود تشاكل وحيد من $L \otimes M$ على $M \otimes L$ يطبق $x \otimes y$ على $y \otimes x$ ، مهما كان x في L و y في M .

ر) لتكن L ، M ، L' ، M' مقاييس أربعة على K ؛ نعتبر التماثلين :

$$u : L \to L' \quad ; \quad v : M \to M'$$

أثبت وجود تماثل وحيد :

$$f : L \otimes M \to L' \otimes M'$$

بحيث :

$$f(x \otimes y) = u(x) \otimes v(y)$$

مهما كان x في L وَ y في M (لاحظ أن الطرف الثاني تابع ثنائي الخطية لِـ x وَ لِـ y) . نقول حينئذ أن f هو الجداء الموتري للتماثلين u وَ v ونرمز له عادة بِـ $u \otimes v$. [قد يؤدي هذا الرمز التقليدي إلى التباس ذلك أنه يشير أيضاً إلى عنصر من المقياس :

$$\text{Hom}(L, L') \otimes \text{Hom}(M, M')$$

لكننا لا نصادف من الناحية العملية، الجداء الموتري الأخير إلاّ نادراً، ولذا فمعنى $u \otimes v$ سيكون دوماً المعنى المعرف أعلاه] .

س) نفرض أن L ، M ، L' ، M' حرة ومن صنف منته ؛ ونختار أسساً لهذه المقاييس، ومنه نعرف أساساً لكل من $L \otimes M$ وَ $L' \otimes M'$ (السؤال ج) أعلاه) ؛ احسب مصفوفة $u \otimes v$ بالنسبة لهذه الأسس، وذلك بدلالة مصفوفتي u وَ v بالنسبة للأسس المختارة [تقودنا النتيجة التي حصلنا عليها إلى مفهوم **الجداء الموتري لمصفوفتين** ؛ لتكن :

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$$
$$B = (b_{kh})_{1 \leq k \leq m,\, 1 \leq h \leq n}$$

مصفوفتين معاملاتها في حلقة تبديلية K . الجداء الموتري لِـ A وَ B هو المصفوفة ذات pm عموداً وَ qn سطراً المعرفة كالتالي : نرقم أعمدة الجداء الموتري بواسطة الثنائيات (i, k) بحيث $1 \leq i \leq p$ وَ $1 \leq k \leq m$ ، ونرقم السطور بواسطة الثنائيات (j, h) بحيث $1 \leq j \leq q$ ، $1 \leq h \leq n$ ؛ بعد هذا يكون حد مصفوفة الجداء الموتري :

$$A \otimes B$$

الواقع في تقاطع العمود الذي دليله (i, k) والسطر الذي دليله (j, h) هو تعريفاً :

$$a_{ij}\ b_{kh}$$

لدينا على سبيل المثال :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} u & v \\ u' & v' \\ u'' & v'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} au & av & bu & bv \\ cu & cv & du & dv \\ au' & av' & bu' & bv' \\ cu' & cv' & du' & dv' \\ au'' & av'' & bu'' & bu'' \\ cu'' & cv'' & du'' & du'' \end{pmatrix}$$

لترتيب الثنائيات (i, k) نستعمل الترتيب الأبجدي الذي يسلم بأن الثنائية (i, j) تأتي قبل الثنائية (k, h) إذا كان $i \leq k$ أو كان $i = k$ وَ $j \leq h$].

ص) لتكن L ، L' ، L'' ، M ، M' ، M'' ستة مقاييس على الحلقة K ؛ نأخذ التماثلات :

$$u' : L \rightarrow L', u'' : L' \rightarrow L'', v' : M \rightarrow M', v'' : M' \rightarrow M''$$

أثبت أن :

$$(u'' \circ u') \otimes (v'' \circ v') = (u'' \otimes v'') \circ (u' \otimes v')$$

استنتج أنه إذا كانت A' ، A'' ، B' ، B'' مصفوفات معاملاتها في K ، فإن الدستور :

$$(A''\ A') \otimes (B''\ B') = (A'' \otimes B'') \cdot (A' \otimes B')$$

محقق شريطة أن يكون له معنى .

ط) لتكن L ، M ، N ثلاثة مقاييس . اثبت وجود تشاكل وحيد :

$$(L \otimes M) \otimes N \rightarrow L \otimes (M \otimes N)$$

يطبق $(x \otimes y) \otimes z$ على $x \otimes (y \otimes z)$ مهما كانت العناصر x من L وَ y من M وَ z من N . [«تجميع» الجداء الموتري ؛ أما من الناحية العملية فنحن لا نفرق بين $x \otimes (y \otimes z)$ وَ $(x \otimes y) \otimes z$ ونكتبهما على السواء $x \otimes y \otimes z$].

ع) لتكن $M_1, \dots, M_p$ مقاييس على K ؛ نشكل المقياس

$$M_1 \otimes M_2 \otimes \dots \otimes M_p = M_1 \otimes (M_2 \otimes \dots \otimes M_p)$$

(تعريف بالتدرج على p) . ليكن f تطبيقاً من $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_p$ في مقياس N على K . أثبت أنه لكي يكون f p الخطية يلزم ويكفي أن يوجد تماثل مقاييس :

$$\bar{f} : M_1 \otimes \dots \otimes M_p \to N$$

بحيث :

$$f(x_1, \dots, x_p) = \bar{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_p)$$

مهما كانت العناصر x_i من M_i ؛ عندئذ يكون التطبيق الخطي $\bar{f}$ معيناً تماماً بـ f (اتبع طريقة التدرج على p وذلك بإعطاء قيمة ثابتة لمتغير من متغيرات f) .

ف) ليكن M مقياساً على K ؛ نعتبر المقياس :

$$M \otimes M \otimes M^*$$

حيث يرمز M^* لثنوي M ؛ اثبت ، باستعمال السؤال السابق ، وجود تماثل وحيد :

$$j : M \otimes M \otimes M^* \to T_1^2(M)$$

من $M \otimes M \otimes M^*$ في مقياس الوترات المتغايرة مرتين والمتغيرة عكسياً مرة واحدة ، على M ، يطبق العنصر :

$$x \otimes y \otimes u \in M \otimes M \otimes M^*$$

على العنصر :

$$x \otimes y \otimes u \in T_1^2(M)$$

وذلك مهما كان x و y في M و u في M^* .

[نذكر ، التمرين 7 من ف 21 ، أن العبارة $x \otimes y \otimes u$ هي الشكل الثلاثي الخطية على $M^* \times M^* \times M$ التي تأخذ القيمة $f(x)\, g(y)\, u(z)$ المنتمية لـ K عند العنصر (f, g, z) من $M^* \times M^* \times M$] . اثبت أن

z تقابلي عندما يكون M حراً ومن صنف منته. عمم هذه النتيجة بتعويض $M \otimes M \otimes M^*$ بـ:

$$M \otimes \ldots \otimes M \otimes M^* \otimes \ldots \otimes M^*$$

(المؤلف من p عاملاً M و q عاملاً M^*) وبتعويض $T_2^1(M)$ بـ $T_q^p(M)$ المعرف في بداية التمرين الأول من هذا الفصل.

ق) نأخذ $K = Z$ و $M = Z/pZ$، أثبت أن $T_2^1(M)$ مكون من 0 لكن الأمر ليس كذلك فيما يخص $M \otimes M$ [اعتبر التطبيق $(x, y) \to xy$ من $M \times M$ في M، وهو الضرب وفق p لصحيحين]. استخلص أن التماثل z في هذه الحالة ليس تقابلياً (بل هو منعدم...).

[إن مفهوم الجداء الموتري لمقياسين، المعرف في هذا التمرين أكثر فائدة من مفهوم الوترة المعرف في الفصل 21، إلا إذا كان الأمر يتعلق بمقاييس حرة ومن صنف منته. والسبب في ذلك هو أن الوترات المعرفة في الفصل 21 تهدف إلى دراسة التطبيقات المتعددة خطية في حلقة الأساس K نفسها، أما الجداءات الموترية الواردة في التمرين 21 فتصلح لدراسة التطبيقات المتعددة الخطية في مقاييس كيفية على K. لكنه يحدث، راجع السؤال (ق) من التمرين 21، أن تكون الوترات الأولى منعدمة كلها دون أن يكون الأمر كذلك فيما يخص الوترات الثانية. نشير أخيراً إلى أن الجداء الموتري، عندما يتعلق الأمر بمصفوفات أو فضاءات شعاعية أبعادها منتهية، يعود أساساً إلى كرونيكير، ولذا يطلق عليه بعض المؤلفين اسم الجداء الكرونيكيري].

أحسب المعينات التالية :

.1
$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix} ;$$

.2
$$\begin{vmatrix} 2\sin t\cos t & 2\sin^2 t - 1 \\ 2\cos^2 t - 1 & 2\sin t\cos t \end{vmatrix}$$

.3
$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix} ;$$

.4
$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & -7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

.5
$$\begin{vmatrix} x^2+1 & xy & xz \\ xy & y^2+1 & yz \\ xz & yz & z^2+1 \end{vmatrix} ;$$

.6
$$\begin{vmatrix} -\cos a & \sin a\cos b & \sin a\sin b \\ -\sin a & \cos a\cos b & \cos a\sin b \\ 0 & -\sin b & \cos b \end{vmatrix}$$

.7
$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1+i \\ 0 & 1 & i \\ 1-i & -i & 1 \end{vmatrix} ;$$

.8 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & z & z^2 \\ 1 & z^2 & z \end{vmatrix}$ حيث : $z = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

.9 $\begin{vmatrix} \sin^2 a & \cos 2a & \cos^2 a \\ \sin^2 b & \cos 2b & \cos^2 b \\ \sin^2 c & \cos 2c & \cos^2 c \end{vmatrix}$ ؛

.10 $\begin{vmatrix} 1 & a & a^4 \\ 1 & b & b^4 \\ 1 & c & c^4 \end{vmatrix}$

.11 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 1 & y & y^2 \\ 1 & z & z^2 \end{vmatrix}$ ؛

.12 $\begin{vmatrix} x+a & b & c \\ a & x+b & c \\ a & b & x+c \end{vmatrix}$

.13 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{vmatrix}$ ؛

.14 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ a & x & c \\ a & b & x \end{vmatrix}$

.15 $\begin{vmatrix} ab & ab' & ab'' \\ a'b & a'b' & a'b'' \\ a''b & a''b' & a''b'' \end{vmatrix}$ ؛

.16 $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ a & 1 & x \\ b & c & 1 \end{vmatrix}$

.17 ليكن V فضاء شعاعياً بعده n على حقل تبديلي K ، و f شكلاً ثنائي الخطية متناوباً على V . نفرض أن الشعاع الوحيد a من V بحيث :

$$f(a, x) = 0 \qquad \forall x \in V$$

هو $a = 0$ (نقول عندئذ عن f إنه غير منحل) .

أ) لتكن A المصفوفة المؤلفة من المعاملات $\alpha_{ij} = f(a_i, a_j)$ لـ f بالنسبة لأساس (a_i) لـ V . أثبت أنه لكي يكون f غير منحل يلزم ويكفي أن يكون A قابلاً للقلب (استعمل النظرية 2 من ف 20) .

ب) ليكن a و b عنصرين من V بحيث $f(a, b) \neq 0$. نضع $f_a(x) = f(a, x)$ و $f_b(x) = f(b, x)$ ؛ أثبت أن f_a و f_b شكلان خطيان غير متناسبين على V . وأن العناصر x من V التي تحقق :

$$f(a, x) = f(b, x) = 0 \qquad (*)$$

تؤلف فضاء شعاعياً جزئياً من V بعده $n - 2$.

حـ) نحتفظ بفروض السؤال ب) . أثبت أن V مجموع مباشر للمستوى المولد عن a و b وللفضاء الجزئي V' لحلول (*) . أثبت أن إقتصار f على V' غير منحل .

د) بالإستدلال بالتدريج على n أثبت : (1) أنه إذا وجد على V شكل ثنائي الخطية متناوب وغير منحل فإن بعد V مزدوجي ، (2) أنه إذا كان f شكلاً ثنائي الخطية متناوباً وغير منحل على فضاء شعاعي V بعده $2p$. فإنه يوجد أساس لـ V يجعل مصفوفة f هي :

$$\begin{pmatrix} 0_p & 1_p \\ -1_p & 0_p \end{pmatrix}$$

حيث يرمز 0_p للمصفوفة المنعدمة من p سطراً و p عموداً .

ر) نقول عن مصفوفة مربعة $A = (\alpha_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ معاملاتها في K ، إنها متناوبة أو ضد تناظرية إذا حققت العلاقات :

$$\alpha_{ii} = 0 \;\; ; \;\; \alpha_{ij} + \alpha_{ji} = 0$$

أثبت أنه يستحيل أن تكون هذه المصفوفة قابلة للقلب عندما يكون n فردياً . إذا كانت A قابلة للقلب و $n = 2p$ ، توجد مصفوفة U من $GL(n, K)$ بحيث :

$$U A {}^{t}U = \begin{pmatrix} 0_p & 1_p \\ -1_p & 0_p \end{pmatrix}$$

س) أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 0 & x & z \\ -x & 0 & y \\ -z & -y & 0 \end{vmatrix} = 0$$

مهما كانت العناصر x ، y ، z من K .

18. لتكن f ، g ، h ثلاثة أشكال خطية على فضاء شعاعي V على حقل تبديلي K . أثبت أنه لكي تكون f ، g ، h مستقلة خطياً يلزم ويكفي أن يكون :

$$f \wedge g \wedge h \neq 0$$

19. ليكن V فضاء شعاعياً بعده n على حقل تبديلي K ، وليكن $(a_i)_{1 \le i \le n}$ أساساً لِـV و f ، g ، h ثلاثة أشكال خطية على V . أثبت أن معاملات $f \wedge g \wedge h$ بالنسبة للأساس (a_i) هي الأعداد السلميات :

$$a_{ijk} = \begin{vmatrix} f(a_i) & f(a_j) & f(a_k) \\ g(a_i) & g(a_j) & g(a_k) \\ h(a_i) & h(a_j) & h(a_k) \end{vmatrix}$$

20. ليكن V فضاء شعاعياً بعده منته على حقل تبديلي ، و (a_i) أساساً لِـV ، وَ f شكلاً ثنائي الخطية متناوباً على V و g شكلاً خطياً على V . أثبت أن معاملات الشكل الثلاثي الخطية المتناوب $f \wedge g$ بالنسبة للأســاس (a_i) هي السلميات :

$$a_{ijk} = f(a_i , a_j)\, g(a_k) + f(a_j , a_k)\, g(a_i) + f(a_k , a_i)\, g(a_j)$$

21. ليكن V فضاء شعاعياً بعده 3 على حقل تبديلي ، وليكن x, y, z ثلاثة عناصر من V .

أ) إذا كانت x, y, z غير مستقلة خطياً ، فإن $f(x , y , z) = 0$ مهما كان الشكل الثلاثي الخطية المتناوب f على V (اكتب أحد الأشعة بواسطة الشعاعين الآخرين) .

ب) إذا كانت x ، y ، z مستقلة خطياً ، فإن $f(x, y, z) \neq 0$ مهما كان

الشكل الثلاثي الخطية المتناوب $f \neq 0$ على V (لاحظ أن x ، y ، z تشكل أساساً لِـ V) .

جـ) ليكن a ، b ، c أساساً لِـ V ؛ لكي تكون x ، y ، z مستقلة خطياً يلزم ويكفي أن يكون معين إحداثياتها بالنسبة للأساس a ، b ، c ، غير منعدم (استعمل السؤالين أ) وَ ب) والمثال 7 من ف 22) .

(ستعمم هذه النتائج في الفصل الموالي ، إلاّ أننا نوصي القارئ بأن يبدأ بدراسة حالة الفضاءات ذات الأبعاد الثلاثة ، دراسة مفصلة . خاصة وأنها على جانب كبير من الأهمية من الناحية العملية) .

22. هل الأشعة :

$$(2, -3, 1) \; ; \; (3, -1, 5) \; ; \; (1, -4, 3)$$

مستقلة خطياً في $\mathbf{R}^3$؟ نفس السؤال فيما يخص الأشعة :

$$(5, 4, 3) \; ; \; (3, 3, 2) \; ; \; (8, 1, 3)$$

1. لتكن K حلقة تبديلية. اثبت أن المصفوفات U من $M_n(K)$ التي تحقق:

$$\text{dét}\,(U) = 1$$

تشكل زمرة جزئية من $GL(n, K)$ - نرمز لها عادة بـ$SL(n, K)$ وتسمى **الزمرة الخاصة الخطية لـn متغيراً على الحلقة K**.

2. إن معين مصفوفة عديمة القوة معاملاتها في حقل تبديلي معين منعدم.

3. لتكن U مصفوفة مربعة معاملاتها صحيحة ومعينها غير منعدم. اثبت أن الأعداد الأولية p الوحيدة التي تظهر في مقامات المعاملات (الناطقة) للمصفوفة U^{-1} هي تلك التي تقسم معين U.

4. لتكن U مصفوفة مربعة متعامدة (أي بحيث $U \cdot {}^tU = 1$) معاملاتها في حقل تبديلي. اثبت أن $\text{dét}\,(U)$ يساوي $1+$ أو $1-$.

5. أوجد عدد قلبات التبديل

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots n & n+1 & n+2 & \dots 2n \\ 1 & 3 & 5 & 2n-1 & 2 & 4 & 6 \dots 2n \end{pmatrix}$$

6. من بين كل تبديلات الأعداد $1, 2, \dots, n$ عين ذلك الذي له عدد قلبات أعظمي.

7. أثبت أنه مهما كان الصحيح k بحيث $0 \leq k \leq \binom{n}{2}$، يوجد تبديل للأعداد $1, 2, \dots, n$، عدد قلباته يساوي k.

8. نعتبر معيناً من الرتبة 6 ونرمز لحدوده بـ a_{ij} حيث $1 \leq i, j \leq 6$. ما هي الإشارة التي يجب أن نعطيها للجداء :

$$a_{61}\ a_{23}\ a_{45}\ a_{36}\ a_{12}\ a_{54}$$

في نشر هذا المعين؟

م 9. نرمز في الزمرة $\mathcal{G}_n$ التي تمثل مجموعة تبديلات الأعداد $\{1, 2, \ldots, n\}$ ، بـ $\mathcal{U}_n$ لمجموعة التبديلات الزوجية .

أ) أثبت أن $\mathcal{U}_n$ زمرة جزئية مميزة من $\mathcal{G}_n$ (زمرة متناوبة من n كائناً) وأن زمرة النسبة $\mathcal{G}_n / \mathcal{U}_n$ متشاكلة مع $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

ب) من أجل $3 \leq i \leq n$ (نفرض $3 \leq n$) نرمز بـ s_i للتديل :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \ldots i-1 & i & i+1 & \ldots n \\ i & 1 & 3 \ldots i-1 & 2 & i+1 & \ldots n \end{pmatrix}$$

أثبت أن العناصر s_i تولد $\mathcal{U}_n$.

جـ) أثبت من أجل $5 \leq n$ ، أن الزمر الجزئية المميزة من $\mathcal{U}_n$ هي $\mathcal{U}_n$ ذاتها والزمرة الجزئية المؤلفة من التطبيق المطابق (وهو الأمر الذي نعبر عنه بالقول أن $\mathcal{U}_n$ زمرة **بسيطة** من أجل $5 \leq n$) . ما هي الزمر الجزئية المميزة في $\mathcal{U}_n$ عندما يكون n مساوياً لـ 2 ، 3 ، 4؟

د) أثبت ، من أجل $n \neq 4$ ، أن الزمرة الجزئية المميزة غير التافهة الوحيدة في $\mathcal{G}_n$ هي $\mathcal{U}_n$.

م 10. لتكن $A = (a_{ij})$ مصفوفة مربعة قابلة للقلب من الرتبة n ، معاملاتها في حقل تبديلي K . نبحث عن مصفوفتين X وَ Y (مربعتين من الرتبة n) معاملاتها في K ، وتحققان العلاقة :

$$A = X \cdot Y$$

والكتابة :

$$X = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \ldots 0 \\ * & * & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ * & * & * \ldots * \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} * & * & * \ldots * \\ 0 & * & * \ldots * \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots * \end{pmatrix}$$

(حيث ترمز * لعناصر كيفية من K) . اثبت أنه حتى تكون X و Y موجودتين يلزم ويكفي أن يكون :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ & & \\ a_{p1} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1 \leq p \leq n-1)$$

نستطيع أن نفرض ، في هذه الحالة ، بأن المعاملات القطرية لـ X (أو لـ Y) مساوية كلها لـ 1 ، عندئذ يعين هذا الشرط المصفوفتين X و Y تعييناً تاماً .

11. لتكن K حلقة تبديلية . نقول عن تطبيق D من K في K بأنه اشتقاق لـ K إذا تحققت العلاقتان :

$$D(x+y) = D(x) + D(y)$$
$$D(xy) = D(x)y + x \cdot D(y)$$

مهما كان x وَ y في K (راجع الفقرة 1 من ف 30) .

ليكن D اشتقاقاً لـ K وَ $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ مصفوفة مربعة من الرتبة n ، معاملاتها في K . من أجل كل صحيح i بحيث $1 \leq i \leq p$ نرمز بـ A_i للمصفوفة التي نحصل عليها بتطبيق D على الحدود الواقعة على العمود i من A . اثبت أن :

$$D(\det(A)) = \det(A_1) + \dots + \det(A_n)$$

(دستور اشتقاق المعينات) .

م م **12.** ليكن M مقياساً على حلقة تبديلية ، وَ f شكلاً p خطية متناوباً على M ، وَ g شكلاً q الخطية متناوباً على M . نعرف تطبيقاً :

$$h : M^{p+q} \to K$$

(حيث يرمز K لحلقة الأساس) بوضع

$$(*) \quad h(x_1, \dots, x_{p+q}) = \sum_{\substack{s \in \mathfrak{S}_{p+q} \\ s(1) < \dots < s(p) \\ s(p+1) < \dots < s(p+q)}} \mathcal{P}(s) \cdot f(x_{s(1)}, \dots, x_{s(p)}) \cdot g(x_{s(p+1)}, \dots, x_{s(p+q)})$$

حيث نأخذ رمز الجمع بحيث يشمل كل التبديلات s للأعداد الصحيحة $1, ..., p+q$، التي تحتفظ بترتيب الأعداد الأولى البالغ عددها p، وبترتيب الأعداد الأخيرة البالغ عددها q.

أ) اثبت أن h شكل $(p+q)$ الخطية متناوب على M. يسمى هذا الشكل الجداء الخارجي للشكلين f وَ g، ونرمز له بـ:

$$h = f \wedge g$$

ب) اثبت أن:

$$g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g$$

جـ) اثبت أنه إذا كانت f، g، h ثلاثة أشكال متعددة الخطية متناوبة على M، فإن:

$$f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$$

(«تجميع» الجداء الخارجي).

د) لتكن $u_1, ..., u_p, v_1, ..., v_q$ أشكالاً خطية على M. نأخذ في الدستور (*):

$$f = u_1 \wedge ... \wedge u_p$$

$$g = v_1 \wedge ... \wedge v_q$$

(راجع المثال 2، الفقرة 3، ف 23). أثبت عندئذ أن:

$$h = u_1 \wedge ... \wedge u_p \wedge v_1 \wedge ... \wedge v_q$$

م م 13. (تعميم نظرية ضرب المعينات) لتكن:

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq p,\, 1 \leq j \leq q}$$

مصفوفة مستطيلة معاملاتها في حلقة تبديلية K؛ نختار عدداً صحيحاً r بحيث $1 \leq r \leq p$ وَ $1 \leq r \leq q$.

ليكن I جزء من المجموعة $\{1, ..., p\}$ يحتوي على r عنصراً، و J جزء من المجموعة $\{1, ..., q\}$ يحتوي على r عنصراً، نرمز بـ a_{IJ}

للمصفوفة المربعة من الرتبة r المؤلفة من العناصر a_{ij} بحيث i ينتمي إلى I وَ j إلى J ؛ نرمز أخيراً بـ :

$$\wedge^r(A)$$

للمصفوفة

$$(\text{dét}(a_{IJ}))_{I \subset \{1,\dots,p\},\ J \subset \{1,\dots,q\},\ \text{card}(I)=\text{card}(J)=r}$$

يمكن أن نرتب الأجزاء I من $\{1,\dots,p\}$، المؤلفة من r عنصراً وفق الترتيب الأبجدي مثلاً ، وذلك بأن نتفق على أن جزء :

$$\{i_1,\dots,i_r\}\ ;\ i_1 < \dots < i_r$$

يسبق جزء :

$$\{j_1,\dots,j_r\}\ ;\ j_1 < \dots < j_r$$

عندما نجد صحيحاً h $(1 \le h \le r)$ بحيث :

$$i_1 = j_1, \dots, i_{h-1} = j_{h-1}, i_h < j_h$$

(راجع طريقة ترقيم الكلمات في القواميس . . .) . تسمى السلميات $\text{dét}(a_{IJ})$ **الأصغريات** من الرتبة r للمصفوفة A .

أثبت أنه إذا كانت A وَ B مصفوفتين معاملاتها في K بحيث تكون للجداء AB معنى ، فإن :

$$\wedge^r(AB) = \wedge^r(A) \cdot \wedge^r(B)$$

م**14.** لتكن A وَ B مصفوفتين من p سطراً وَ q عموداً ، معاملاتها في حلقة تبديلية K . نقول عن A وَ B أنهما متكافئتان (على حلقة الأساس K) إذا وجدت مصفوفتان :

$$U \in GL(p, K) \quad ، \quad V \in GL(q, K)$$

بحيث $B = U\,A\,V$.

إذا كان الأمر كذلك ، أثبت ، من أجل كل r وَ $p \ge r$ ، $q \ge r$ ، أن مثالي K المولد عن الأصغريات من الرتبة r لـ A يساوي المثالي المولد عن الأصغريات من الرتبة r لـ B .

[تنبيه - القضية العكسية صحيحة عندما تكون K رئيسية ؛ راجع التمرين 11 (ر) في الفصل 31.]

م 15. لتكن K حلقة تبديلية وَ A عنصراً من $M_p(K)$ وَ B من $M_q(K)$ ؛ نعتبر [التمرين 4 (س) ، ف 21] المصفوفة $A \otimes B$ من $M_{pq}(K)$. أثبت أن لدينا :

$$\text{dét}\,(A \otimes B) = \text{dét}\,(A)^q \cdot \text{dét}\,(B)^p$$

م 16. لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة n معاملاتها في حلقة تبديلية K . نعتبر ، من أجل $1 \leq r \leq n$ ، المصفوفة $\wedge^r(A)$ الواردة في التمرين 14 . أثبت أن :

$$\text{dét}\,(\wedge^r(A)) = \text{dét}\,(A)^{\binom{n-1}{r-1}}$$

م م 17 .ليكن M مقياساً حراً من صنف منته على حلقة تبديلية و u تشاكلاً ذاتياً لِـ M . أحسب معين التشاكل الذاتي $T_q^p(u)$ لِـ $T_q^p(M)$ (التمرين 1 ، ف 21) بدلالة معين u .

م 18. لتكن A مصفوفة مربعة رتبتها فردية ومعاملاتها في حلقة تبديلية K . نفرض أن A ضد تناظري أي أن $^tA = -A$.

أثبت أن $\text{dét}\,(A) = 0$. (استعمل التمرين 17 من ف 22) .

احسب المعينات التالية :

.1
$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix} \text{؛}$$

.2
$$\begin{vmatrix} x & a & b & 0 & c \\ 0 & y & 0 & 0 & d \\ 0 & e & z & 0 & f \\ g & h & k & u & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & v \end{vmatrix}$$

.3
$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ -b & a & d & -c \\ -c & -d & a & b \\ -d & c & -b & a \end{vmatrix} \text{؛}$$

.4
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

.5
$$\begin{vmatrix} 6 & -5 & 8 & 4 \\ 9 & 7 & 5 & 2 \\ 7 & 5 & 3 & 7 \\ -4 & 8 & -8 & -3 \end{vmatrix} \text{؛}$$

.6
$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$$

.7
$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix} \text{؛}$$

.8
$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ -x & x & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -x & x & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & x \end{vmatrix}$$

م 9.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{vmatrix}$$

نرمز بـ D_n لهذا المعين الذي رتبته تساوي n، ونبحث عن علاقة بسيطة تربط D_n ، D_{n-1} ، D_{n-2} ثم نستعمل النتيجة التالية: لتكن $(u_n)_{n \geq 1}$ متتالية أعداد عقدية بحيث تتحقق علاقة التدرج:

$$u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$$

ليكن z_1 و z_2 جذري ($z_1 \neq z_2$ أو $z_1 = z_2$) المعادلة:

$$z^2 - az - b = 0$$

عندئذ، إذا كان $z_2 \neq z_1$ فإنه يوجد ثابتان c_1 و c_2 بحيث:

$$u_n = c_1 z_1^n + c_2 z_2^n \quad \forall_n$$

أما إذا كان $z_2 = z_1$ فإنه يوجد ثابتان c_1 و c_2 بحيث:

$$u_n = (c_1 n + c_2) z_1^n \quad \forall_n$$

للحصول على نتائج أكثر شمولاً انظر التمرين 16 من الفصل 35.

م 10.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{vmatrix}$$

(استعمل الطريقة المقترحة في التمرين السابق).

$$\begin{vmatrix} 1-n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1-n & 1 \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1-n \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 \dots & 1-n \end{vmatrix} \quad .11$$

وهو معين من n سطراً و n عموداً.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n \dots & n \\ n & 2 & n \dots & n \\ n & n & 3 \dots & n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ n & n & n \dots & n \end{vmatrix} \quad .12$$

$$\begin{vmatrix} x & a_1 & a_2 \dots a_{n-1} & 1 \\ a_1 & x & a_2 \dots a_{n-1} & 1 \\ a_1 & a_2 & x \dots a_{n-1} & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \dots a_n & 1 \end{vmatrix} \quad .13$$

ابحث عن جذور هذا التابع لـ x الذي يكتب على شكل كثير حدود.

م **14.** اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \dots x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 \dots x_2^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_j - x_i)$$

(معين فاندر موند ، تلاحظ مثلاً أن الطرف الأول كثير حدود من الدرجة $n - 1$ على الأكثر لـ x_1 وتمثل x_n ، ... ، x_2 جذوراً بديهية لهذا كثير الحدود) .

م 15.
$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \dots x_1^{n-2} & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 \dots x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}$$

م 16.
$$\begin{vmatrix} 1 & f_1(x_1) & f_2(x_1) \dots f_{n-1}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & f_1(x_n) & f_2(x_n) \dots f_{n-1}(x_n) \end{vmatrix}$$

حيث : $f_k(x) = x^k + a_{k1} x^{k-1} + \dots + a_{kk}$

م 17.
$$\begin{vmatrix} 1 & \binom{1}{x_1} & \binom{2}{x_1} \dots \binom{n-1}{x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 & \binom{1}{x_n} & \binom{2}{x_n} \dots \binom{n-1}{x_n} \end{vmatrix}$$

حيث نضع :

$$\binom{x}{k} = \frac{x(x-1)\dots(x-k+1)}{k!}$$

م م 18. أثبت أن :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d & e & f & g & h \\ b & a & d & c & f & e & h & g \\ c & d & a & b & g & h & e & f \\ d & c & b & a & h & g & f & e \\ e & f & g & h & a & b & c & d \\ f & e & h & g & b & a & d & c \\ g & h & e & f & c & d & a & b \\ h & g & f & e & d & c & b & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+b+c+d+e+f+g+h)(a+b+c+d-e-f-g-h)\times$$
$$\times(a+b-c-d+e+f-g-h)(a+b-c-d-e-f+g+h)\times$$
$$\times(a-b+c-d+e-f+g-h)(a-b+c-d-e+f-g+h)\times$$
$$\times(a-b-c+d+e-f-g+h)(a-b-c+d-e+f+g-h)$$

19. برهن

$$\begin{vmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 \dots & 1+x_1y_n \\ \dots & \dots & \dots \\ 1+x_ny_1 & 1+x_ny_2 \dots & 1+x_ny_n \end{vmatrix} = 0 \ ; \quad n \geq 3$$

م 20. أحسب المعين التالي، بالتدريج على عدد السطور n .

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ \dots & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

م 21.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3} & \dots & 0 \\ \dots & & & & & \\ 1 & \binom{n}{1} & \binom{n}{2} & \binom{n}{3} & \dots & \binom{n}{n-1} \end{vmatrix} = 1$$

م 22. بحساب الجداء :

$$\begin{vmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x & -y & -z & -t \\ y & x & -t & z \\ z & t & x & -y \\ t & -z & y & x \end{vmatrix}$$

اثبت متطابقة أويلر :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) = (ax + by + cz + dt)^2 + \\ + (ay - bx + ct - dz)^2 + (az - bt - cx + dy)^2 + \\ + (at + bz - cy + dx)^2$$

هل ترى صلة بين هذا التمرين والتمرينين 10 وَ 11 من الفصل 15؟

احسب مقلوبات المصفوفات التالية:

23. $\begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 3 & 9 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ؛ 24. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & -5 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & -4 \\ 1 & -1 & -4 & 9 \end{pmatrix}$

26. احسب مرتبتي المصفوفتين:

$$\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & -3 & 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -6 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -1 & 3 & -1 & -8 \end{pmatrix}$$

27. هل الأشعة:

$(1, 0, 0, 2, 5), (0, 1, 0, 3, 4), (0, 0, 1, 4, 7), (2, -3, 4, 11, 12)$

مستقلة خطياً في $\mathbf{R}^5$؟

م م 28. أثبت أن:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

29. احسب :

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 \\ 4 & 9 & 16 & 25 \\ 9 & 16 & 25 & 36 \\ 16 & 25 & 36 & 49 \end{vmatrix}$$

30. كم من عملية جمع وضرب ينبغي أجراؤها، مبدئياً، لحساب معين من الرتبة 10؟

31. أوجد حل التمارين من 1 إلى 17 في الفصل 20، باستعمال طريقة المعينات.

32. أوجد حلول جملة المعادلات الخطية التالية وناقشها :

أ)

$$\begin{cases} ax + by + z = 1 \\ x + aby + z = b \\ x + by + az = 1 \end{cases}$$

ب)

$$\begin{cases} ax + by + 2z = 1 \\ ax + (2b - 1)y + 3z = 1 \\ ax + by + (b + 3)z = 2b - 1 \end{cases}$$

جـ)

$$\begin{cases} 2(a + 1)x + 3y + az = a + 4 \\ (4a - 1)x + (a + 1)y + (2a - 1)z = 2a + 2 \\ (5a - 4)x + (a + 1)y + (3a - 4)z = a - 1 \end{cases}$$

م م 33 (نشر معين حسب قاعدة لابلاس). لتكن K حلقة تبديلية و n عدداً صحيحاً أكبر تماماً من 1. نرمز بـ :

$$D(x_1, \dots, x_n)$$

للمعين المؤلفة من n شعاعاً x_i في K^n، بالنسبة للأساس القانوني (e_i) لِـ K^n. نضع :

$$x_i = \xi_{1i} e_1 + \dots + \xi_{ni} e_n$$

أخيراً نختار صحيحاً p بحيث $1 \le p \le n$.

أ) أثبت أن لدينا العلاقة :

$$D(x_1, \ldots, x_n) = \sum \begin{vmatrix} \xi_{1 i_1} & \ldots & \xi_{p i_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{1 i_p} & \ldots & \xi_{p i_p} \end{vmatrix} D(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, x_{p+1}, \ldots, x_n)$$

(انظر لـ $D(x_1, \ldots, x_n)$ كتابع متعدد الخطية متناوب لـ $x_p, \ldots, x_1$)

ب) اثبت، من أجل $1 \leq i_1 < \ldots < i_p \leq n$، أن:

$$D(e_{i_1}, \ldots, e_{i_p}, x_{p+1}, \ldots, x_n) = \begin{vmatrix} \xi_{p+1\, j_1} & \ldots & \xi_{n j_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{p+1\, j_{n-p}} & \ldots & \xi_{n j_{n-p}} \end{vmatrix}$$

حيث نرمز بـ $j_1, \ldots, j_{n-p}$ لصحيحات $\{1, 2, \ldots, n\}$ التي لا تنتمي إلى المجموعة $\{i_1, \ldots, i_p\}$، والمرتبة بحيث يكون التبديل $(i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_{n-p})$ لـ $\{1, \ldots, n\}$ زوجياً.

جـ) لنكن:

$$X = (\xi_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$$

مصفوفة مربعة من الرتبة n، معاملاتها في K. من أجل كل جزء I مؤلف من p عنصراً، من المجموعة $\{1, 2, \ldots, n\}$ نرمز بـ X_I للمصفوفة المؤلفة من العناصر ξ_{ij} بحيث $i \in I$ و $1 \leq j \leq p$، وبـ X'_I للمصفوفة (المتممة) المؤلفة من العناصر ξ_{ij} بحيث $i \notin I$ و $p + 1 \leq j \leq n$. أخيراً نرمز بـ $n(I)$ لعدد الثنائيات (i, j) بحيث يكون $i \in I$ و $j \notin I$ و $j < i$. اثبت أن:

$$\det(X) = \sum_{\operatorname{card}(I) = p} (-1)^{n(I)} \det(X_I) \det(X'_I)$$

(دستور لابلاس) حيث يشمل المجموع كل الأجزاء I المكونة من p عنصراً والمحتواة في المجموعة $\{1, \ldots, n\}$.

د) استخلص من هذه النتيجة دستور تجميع جداء الخارجي [التمرين 13، د)، ف 23]. طبق قاعدة لابلاس على حساب المعينات التالية:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 4 & 3 \\ 4 & 4 & 0 & [illegible] & 0 \end{vmatrix}$$ .35

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 0 & 9 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 7 & 5 \end{vmatrix}$$ .34

$$\begin{vmatrix} [illegible] & 1 & 1 & 0 & 0 \\ [illegible] & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & [illegible] & [illegible] & [illegible] & 1 \\ 0 & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] \\ 0 & [illegible] & [illegible] & [illegible] & [illegible] \end{vmatrix}$$ .37

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$ .36

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 & 2 \\ -5 & 6 & 5 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -3 & 7 & -5 \\ -1 & -4 & 1 & 1 & -2 \\ -3 & 7 & 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$ .38

1. اثبت أن الأعداد العدية التالية جبرية، وشكِّل من أجل كل واحد منها معادلة جبرية معاملاتها ناطقة.

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}\ ;\ \sqrt[3]{2}+\sqrt{3}\ ;\ \sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{3}\ ;\ \sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{5}$$

2. ليكن L حقلاً تبديلياً و K حقلاً جزئياً من L و x عنصراً من L متسامياً على K. أوجد كل العلاقات الجبرية ذات المعاملات في K، التي تربط العنصرين:

$$x^2+1 \text{ و } x^3$$

المنتميين إلى L. نفس السؤال فيما يخص:

$$x^3+x+1 \text{ وَ } x^5$$

م 3. لتكن A حلقة تامة تبديلية و K حقلاً جزئياً من A. نفرض أن بعد A منته بصفته فضاء شعاعياً على K؛ أثبت أن A حقل.

ليكن L حقلاً تبديلياً و K حقلاً جزئياً من L وَ $x_1, \ldots, x_n$ عناصر من L، جبرية على K. اثبت أن الحلقة الجزئية $K[x_1, \ldots, x_n]$ من L، حقل.

م م 4. ليكن K حقلاً تبديلياً. نقول عن حقل L أنه توسيع لِـ K إذا كان K حقلاً جزئياً من L (فالحقل **C**، مثلاً، يعتبر توسيعاً لِـ **R**، كما يعتبر **R** توسيعاً للحقل **Q**). نستطيع حينئذ النظر إلى L كفضاء شعاعي على K؛ إذا كان بعد L منتهياً على K، أي إذا وجدت عناصر $a_1, \ldots, a_r$

من L ، عددها منته، بحيث يمكن كتابة كل عنصر من L على النحو :

$$x_1 a_1 + \dots + x_r a_r$$

حيث تنتمي العناصر x_i إلى K ، نقول في هذه الحالة أن L **توسيع منتهي الدرجة** لِـ K ؛ يسمى بعد L ، باعتباره فضاء شعاعياً على K ، **درجة** L على K ونرمز لها بِـ :

$$[L : K] ;$$

أساس L على K هو، تعريفاً، كل أساس لِـ L ، باعتباره فضاء شعاعياً على K . إذا كان $K = \mathbf{Q}$ فإن التوسيعات المنتهية الدرجة لِـ K هي، تعريفاً، **حقول الأعداد الجبرية** [كان يشترط على حقول الأعداد الجبرية، قديماً، أن تكون توسيعات منتهية الدرجة لِـ $\mathbf{Q}$ ومحتواة في $\mathbf{C}$ ، لكنه من السهل أن نرى بأننا نستطيع «تغطيس» كل توسيع منتهى الدرجة لِـ $\mathbf{Q}$ ، في $\mathbf{C}$ وذلك يصبح هذا الشرط حشواً] . نرمز فيما يلي بِـ K لحقل تبديلي وبِـ L لتوسيع منتهى الدرجة لِـ K (نرمز بِـ n لهذه الدرجة) . من أجل كل a في L نرمز بِـ u_a للتطبيق من L في L المعطى بِـ :

$$u_a(x) = ax \quad , \quad \forall x \in L$$

أ) اثبت أن u_a تماثل داخلي لِـ L ، باعتبار L فضاء شعاعياً على K ، وأن لدينا العلاقتين :

$$u_a + u_b = u_{a+b} \quad , \quad u_a \circ u_b = u_{ab}$$

مهما كان a وَ b في L . ما هي التماثلات الداخلية لِـ L (بصفته فضاء شعاعياً على K) التي تتبادل مع كل التطبيقات u_a؟

ب) من أجل كل a من L ، نضع :

$$Tr_{L/K}(a) = Tr(u_a), \; N_{L/K}(a) = \text{dét}\,(u_a)$$

(ننظر لِـ u_a كتماثل داخلي لفضاء شعاعي بعده منته على K ؛ نشير إلى أن معين u_a معرف في الفقرة 5، ف 23، وأن الأثر معرف في التمرين 22، ف 19) . نقول أن $Tr_{L/K}(a)$ أثر a وَ $N_{L/K}\ (a)$ **ناظم** a (بالنسبة للحقل الجزئي K) ؛ وهما عنصران من K . اثبت أن لدينا :

$$Tr_{L/K}(a+b) = Tr_{L/K}(a) + Tr_{L/K}(b); N_{L/K}(ab) = N_{L/K}(a)\, N_{L/K}(b)$$

مهما كان a وَ b في L . إذا كان L من الدرجة n على K فإن :

$$Tr_{L/K}(a) = na \quad ; \quad N_{L/K}(a) = a^n$$

من أجل كل a في K .

جـ) ليكن $(a_i)_{1 \le i \le n}$ أساساً لِـ L باعتباره فضاء شعاعياً على K ؛ إذن فكل x من L يكتب بطريقة وحيدة على النحو :

$$x = \xi_1 a_1 + \dots + \xi_n a_n$$

حيث $\xi_1, \dots, \xi_n \in K$.

نضع :

$$xa_i = \sum_{1 \le j \le n} \lambda_{ij}\, a_j$$

حيث تنتمي العناصر λ_{ij} إلى K . احسب $Tr_{L/K}(x)$ وَ $N_{L/K}(x)$ بدلالة العناصر λ_{ij} .

د) نفرض أن K ذو مميزة تساوي 0 (أي أنه إذا كان x في K و r في $\mathbf{Z}$ بحيث $rx = 0$ ، فإن لدينا إما $r = 0$ وإما $x = 0$ ؛ راجع الفقرة 6، الفصل 30) . اثبت أنه إذا كان عنصر a من L يحقق :

$$Tr_{L/K}(ax) = 0 \qquad \forall x \in L$$

فإن $a = 0$. استنتج أنه إذا كان $(a_i)_{1 \le i \le n}$ أساساً لِـ L على K ، فإن :

$$\text{dét}\left(Tr_{L/K}(a_i\, a_j)_{1 \le i,j \le n}\right) \neq 0$$

ر) ليكن $(a_i)_{1 \le i \le n}$ أساساً لِـ L على K ؛ نعتبر n عنصراً

$$b_i = \sum_{1 \le j \le n} \varrho_{ij}\, a_j \qquad (\varrho_{ij} \in K, 1 \le i \le n)$$

من L . أثبت ، بعد إدخال المصفوفتين :

$$A = \left(Tr_{L/K}(a_i\, a_j)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

$$B = \left(Tr_{L/K}(b_i\, b_j)\right)_{1 \le i,j \le n}$$

أن لدينا :

$$\text{dét}(B) = \text{dét}(A) \cdot \text{dét}(\varrho_{ij})^2$$

استنتج (عندما تكون مميزة K مساوية لـ 0) النتيجة التالية : لكي تشكل عناصر $x_1, ..., x_n$ من L ، أساساً لـ L على K ، يلزم ويكفي أن يكون معين المصفوفة :

$$(Tr_{L/K}(x_i\ x_j))_{1\le i,j\le n}$$

غير منعدم . يسمى هذا المعين مميز العناصر $x_1, ..., x_n$ من L ، ويرمز له عموماً بـ :

$$D_{L/K}(x_1, ..., x_n)$$

س) نفرض أن مميزة K تساوي 0 ، وليكن $(u_i)_{1\le i\le n}$ أساساً لـ L على K ؛ أثبت وجود أساس آخر $(v_i)_{1\le i\le n}$ لـ L على K بحيث :

$$Tr_{L/K}(u_i\ v_j) = \begin{cases} 1 & ; i = j \\ 0 & ; i \neq j \end{cases}$$

(بين أن إحداثيات v_i بالنسبة للأساس (u_i) معطاة بجملة من نوع جمل كرامر) . نقول أن الأساسين (u_i) وَ (v_i) يتمان بعضهما .

ص) نحتفظ برموز وفروض السؤال السابق ، اثبت أن إحداثيات كل عنصر x من L بالنسبة للأساس (v_i) هي العناصر :

$$Tr_{L/K}(x\, u_i)$$

المنتمية لـ K .

ط) نلغي الشرط القائل أن مميزة K تساوي 0. نقول عن L إنه توسيع **قابل للفصل** لـ K ، إذا وجد عنصر x من L يحقق :

$$Tr_{L/K}(x) \neq 0$$

اثبت أن نتائج الأسئلة د) ، ر) ، س) ، ص) تبقى قائمة في هذه الحالة .

م م 5 ليكن L حقلاً تبديلياً ، و K حقلاً جزئياً منه ، نفرض أن L توسيع منتهي الدرجة لـ K (التمرين 4) ، ونرمز بـ E لحقل جزئي من L يحتوي K .

أ) اثبت أن L توسيع منتهي الدرجة لـ E ، وأن E توسيع منتهي الدرجة لـ K .

ب) ليكن $(a_i)_{1 \leq i \leq r}$ أساساً لـ L على E ، وليكن $(b_j)_{1 \leq j \leq s}$ أساساً لـ E على K . اثبت أن العناصر $a_i b_j$ ، البالغ عددها rs ، تشكل أساساً لـ L على K . استنتج أنه إذا رمزنا بـ : $[L : K]$ لدرجة L على K (أي لبعد L باعتباره فضاء شعاعياً على K) فإننا نحصل على العلاقة :

$$[L : K] = [L : E][E : K]$$

جـ) اثبت أن لدينا العلاقتين التاليتين ، من أجل كل x في L :

$$Tr_{L/K}(x) = Tr_{E/K}\left(Tr_{L/E}(x)\right)$$
$$N_{L/K}(x) = N_{E/K}\left(N_{L/E}(x)\right)$$

(بخصوص الرموز المستعملة ، أنظر التمرين 4) .

د) ليكن x عنصراً من L و :

$$x^s - a_{s-1}x^{s-1} + \dots + (-1)^s a_0 = 0$$

معادلة جبرية معاملاتها في K ، يحققها العنصر x ومن الدرجة s على الأقل . اثبت أن العناصر :

$$1, x, \dots, x^{s-1}$$

تؤلف أساساً للحقل $K[x]$ على K . باستعمال السؤال ج) من التمرين 4 ، وبوضع $K[x] = E$ ، اثبت أن لدينا :

$$Tr_{E/K}(x) = a_{s-1} \quad , \quad N_{E/K}(x) = a_0$$

استخلص أن :

$$Tr_{L/K}(x) = \frac{n}{s}\, a_{s-1} \quad , \quad N_{L/K}(x) = (a_0)^{n/s}$$

حيث $n = [L : K]$.

1. لتكن K حلقة تامة غير منتهية. نقول عن جزء A من K^n إنه مفتوح زاريسكي في K^n إذا وجدت كثيرات حدود $f_1, \dots, f_r$ من $K[X_1, \dots, X_n]$، عددها منته، بحيث يكون متمم المجموعة A في K^n مساوياً لمجموعة العناصر x من K^n التي تحقق العلاقات:

$$f_1(x) = \dots = f_r(x) = 0$$

ليكن f و g كثيري حدود لـ n متغيراً، معاملاته في K، نفرض أنه يوجد في K^n مفتوح زاريسكي غير خال A بحيث:

$$f(x) = g(x) \qquad \forall x \in A$$

اثبت عندئذ أن $f = g$ (مبدأ تمديد المتطابقات الجبرية).

2. اثبت أنه إذا حققت كثيرات الحدود الثلاثة f، g، h المنتمية لـ $\mathbb{R}[X]$ واحدة من العلاقات الثلاث التالية، فإن $f = g = h = 0$:

$$f(X)^2 - X g(X)^2 = X h(X)^2$$

$$f(X)^2 - X g(X)^2 + h(X)^2 = 0$$

$$f(X)^2 + g(X)^2 + (X + 2) h(X)^2 = 0$$

هل نستطيع في هذه الحالة تعويض $\mathbb{R}$ بحقل تبديلي كيفي؟

3. ليكن K حقلاً تبديلياً، و f كثير حدود لمتغير واحد، معاملاته في K، ولتكن $a_1, \dots, a_r$ جذوراً مختلفة مثنى مثنى لـ f في K. اثبت بواسطة التوطئة 1 من الفصل 28، أنه يوجد كثير حدود g معاملاته في K بحيث:

$$f(X) = (X - a_1) \dots (X - a_r)\, g(X)$$

تطبيق : احسب (بدون حساب !) المعين :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$$

4. نفس السؤال فيما يخص المعين :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1\ 1 & 1 & \dots & n-x \end{vmatrix}$$

5. لتكن $f_1, \dots, f_n$ كثيرات حدود لمتغير واحد، معاملاتها في حلقة تبديلية K ، ودرجاتها لا تتجاوز $n-2$. اثبت أن لدينا :

$$\begin{vmatrix} f_1(x_1) & f_1(x_2) & \dots f_1(x_n) \\ f_n(x_1) & f_n(x_2) & \dots f_n(x_n) \end{vmatrix} = 0$$

مهما كانت العناصر x_i من K .

م**6.** ليكن K حقلاً تبديلياً غير منته وَ $a_0, \dots, a_n$ عناصر معطاة مختلفة مثنى مثنى ، من K . اثبت أنه يوجد كثير حدود وحيد f من $K[X]$ ؛ درجته لا تتجاوز n ، بحيث :

$$f(a_i) = b_i \qquad (0 \leq i \leq n)$$

حيث ترمز b_i لعناصر معطاة في K ، وأن f معين **بدستور استقطاب لاغرانج** :

$$f(X) = \sum_{i=0}^{i=n} b_i \frac{(X-a_0)\dots(X-a_{i-1})(X-a_{i+1})\dots(X-a_n)}{(a_i-a_0)\dots(a_i-a_{i-1})(a_i-a_{i+1})\dots(a_i-a_n)}$$

مثال – أوجد كثير حدود f درجته 3 بحيث :

$$f(1) = 2,\ f(2) = 1,\ f(3) = 4,\ f(4) = 3$$

م 7. نضع

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$$

أوجد كثير حدود درجته $n - 1$ ، معاملاته عقدية ، بحيث :

$$f(z_K) = k + 1 \qquad (0 \leq k \leq n - 1)$$

الجواب :

$$f(X) = \frac{n+1}{2} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{k=n-1}\left(1 - i \cdot \operatorname{cotg}\frac{k\pi}{n}\right)X^k$$

8. ليكن f تابعاً معرفاً على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbf{N}$ ، قيمه عقدية . نعرف تابعاً جديداً Δf بـ :

$$\Delta f(n) = f(n+1) - f(n)$$

ثم نعرف على التوالي :

$$\Delta^2 f = \Delta(\Delta f),\ \Delta^3 f = \Delta(\Delta^2 f),\ \ldots$$

أخيراً ، نقول أن f **يكتب على شكل كثير حدود درجته** r إذا وجدت ثوابت $a_0, \ldots, a_r$ بحيث :

$$f(n) = a_r n^r + a_{r-1} n^{r-1} + \ldots + a_0,\ \forall n \in \mathbf{N}$$

وحيث $a_r \neq 0$.

أ) اثبت ، إذا كان f يكتب على شكل كثير حدود درجته r ، أن :

$$\Delta^{r+1} f = 0;\ \Delta^r f \neq 0$$

ب) احسب Δf عندما يكون :

$$f(n) = \frac{n(n-1)\ldots(n-r+1)}{r!} = \binom{n}{r} \qquad \forall n \in \mathbf{N}$$

استنتج أنه إذا كان f يكتب على شكل كثير حدود كيفي من الدرجة r ، فإن :

$$f(n) = c_0 + c_1\binom{n}{1} + \ldots + c_r\binom{n}{r}$$

حيث $c_k = \Delta^k f(0)$.

جـ) اثبت أنه إذا حقق تابع $f(n)$ العلاقتين :

$$\Delta^{r+1} f = 0;\ \Delta^r f \neq 0$$

فإن f يكتب على شكل كثير حدود درجته r .

د) ليكن g تابعاً يكتب على شكل كثير حدود من الدرجة $r-1$ على $\mathbf{N}$. اثبت أنه يوجد تابع f وحيد يكتب على شكل كثير حدود من الدرجة r ، على $\mathbf{N}$ بحيث :

$$\Delta f = g\ ,\ f(0) = 0$$

بحساب f بالدستور الوارد في السؤال (ب) استنتج عبارة للمجموع :

$$g(0) + g(1) + \ldots + g(n)\ ;$$

تطبيق : احسب المجموعين :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\ ;\ 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3$$

م م 9. (نذكر أنه إذا كانت A حلقة تبديلية ، فإننا نقول عن مثالي I من A أنه أولي إذا كان $A \neq I$ وكانت العلاقة $xy \in A$ ، حيث x و y عنصران في A ، تستلزم $x \in I$ أو $y \in I$ ؛ كما نقول عن مثالي I من A إنه أعظمي إذا كان $A \neq I$ وكانت المثاليات الوحيدة التي تحتوي I هي I و A ؛ أخيراً نذكر أن كل مثالي لـ A ، ماعدا A نفسه ، محتوى حتماً في مثالي أعظمي واحد على الأقل) .

نريد البرهان على أنه إذا كانت K حلقة تبديلية ، فإن تقاطع كل المثاليات الأولية لـ K يساوي مجموعة العناصر العديمة القوة في K .

أ) اثبت أنه إذا كان مثالي I من K يحقق $I \neq K$ ، فإن المثالي I' لحلقة كثيرات الحدود $K[X]$ المولد عن I يحقق $I' \neq K[X]$.

استنتج من أجل كل مثالي أولي لـ K ، أنه يوجد مثالي أعظمي لـ $K[X]$ يحتوي هذا المثالي الأولي .

ب) نفرض أن عنصراً u من K ينتمي إلى كل المثاليات الأولية في K . اثبت أن كثير الحدود $uX - 1$ لا ينتمي لأي مثالي أعظمي من الحلقة $K[X]$ ، استنتج أنه يقبل القلب في الحلقة $K[X]$

ح) اثبت أن كثير الحدود $uX - 1$ $(u \in K)$ يقبل القلب في $K[X]$ إذا وفقط إذا كان u عديم القوة ، استخلص النتيجة المنصوص عليها في بداية التمرين .

د) ليكن I مثالياً من حلقة تبديلية K ، حيث $I \neq K$. اثبت أن تقاطع المثاليات الأولية في K التي تحتوي I ، مشكلة من العناصر x المنتمية لـ K بحيث :

$$x^n \in I$$

من أجل صحيح n على الأقل .

10. ليكن K حقلاً تبديلياً ، و $K[f]$ الحلقة الجزئية من $K[X]$ المولدة عن كثير حدود f من $K[X]$. لكي يكون $K[f] = K[X]$ يلزم ويكفي أن يكون :

$$f(X) = aX + b \; ; \; a \neq 0$$

11. لتكن K حلقة تبديلية . نسمي سلسلة شكلية لمتغير واحد ، معاملاتها في K ، كل متتالية :

$$f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$$

عناصرها في K (لانفرض أن العناصر a_i منعدمة كلها تقريباً) نعرف مجموع وجداء سلسلتين من هذا النوع بواسطة الدستورين (2) و (3) من الفصل 27 ، الفقرة 2 ، واللذين استعملا لتعريف مجموع وجداء كثيري حدود . اثبت أن هذين التعريفين يعطيان حلقة تبديلية تحتوي على حلقة جزئية متشاكلة مع $K[X]$.

نرمز عادة بـ $K[[X]]$ للحلقة التي نحصل عليها بهذه الطريقة ; بدل

الرمز $f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ الذي أتخذناه في البديلة، تمثل السلاسل الشكلية بالـكتابة التالية :

$$f = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \qquad (*)$$

التي من شأنها أن تساعدنا على تذكر الدساتير التي تعرّف العلميات الأساسية : لضرب سلسلتين شكليتين الواحدة في الأخرى، نضربهما «حداً حداً» ثم نضم الحدود التي لها نفس الدرجة في النتيجة التي نحصل عليها . من الواضح أن الدستور (*) لامعنى له من الناحية النظرية. ذلك أنه يحتوي على عدد غير منته من الحدود غير المنعدمة، ولذا ينبغي أن نعتبره مجرد رمز سهل يمثل متتالية العناصر a_i من K .

برهن على النتائج التالية :

أ) لكي تكون الحلقة $K[[X]]$ تامة يجب ويكفي أن تكون K كذلك .

ب) لكي يكون عنصر (*) من $K[[X]]$ قابلاً للقلب في $K[[X]]$ يلزم ويكفي أن يكون «حده الثابت» a_0 قابلاً للقلب في K (وهذا فرق كبير مع ما يحدث في حلقات كثيرات الحدود . . .) .

جـ) احسب مقلوب $1 - X$ في $K[[X]]$.

م م 12. لتكن K حلقة تبديلية وَ :

$$p(X, Y) = p_0(X) + p_1(X)Y + \ldots + p_n(X)Y^n$$

كثير حدود لمتغيرين. معاملاته في K . نفرض $p_0(0) = 0$ وَ $p_1(0)$ يقبل القلب في K [أي أن $p(0, 0) = 0$ وَ $p'_y(0, 0) \neq 0$ عندما يكون K حقلاً] .

اثبت وجود سلسلة شكلية وحيدة :

$$y = a_1 X + a_2 X^2 + \ldots$$

معاملاتها في K ولاتحتوي على حد ثابت وتتحقق العلاقة :
. $p(X, y) = 0$

[نستطيع اتباع الخطوات التالية : نفرض أننا وجدنا ثوابت $a_1, \ldots, a_r$ في K بحيث يكون كثير الحدود :

$$p(X, a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_r X^r)$$

لا يحتوي على أي حد درجته أقل من r أو تساويه ، ثم نبين وجود a_{r+1} في K بحيث يكون كثير الحدود :

$$p(X, a_1 X + a_2 X^2 + \ldots + a_{r+1} X^{r+1})$$

لا يحتوي على أي حد درجته أقل من $r + 1$ أو تساويه .]

احسب y إذا كان $K = \mathbf{C}$ وَ $f(X, Y) = (X - 1)^p - Y^q$ حيث p وَ q صحيحان موجبان . هل ترى علاقة بين السلسلة الشكلية التي حصلت عليها والنشر حسب سلسلة صحيحة (الذي يدرس في مادة التحليل) للتابع .

$$(z - 1)^{p/q}$$

م13. ليكن p عدداً أولياً و f وَ g كثيري حدود معاملاتهما صحيحة ناطقة .

أ) اثبت أنه إذا كان p قاسماً لكل معاملات f و g فإنه يقسم كل معاملات f أو كل معاملات g .

ب) نقول عن كثير حدود ، معاملاته صحيحة ناطقة أنه بدائي إذا كان القاسم المشترك الأكبر لمعاملاته يساوي 1 . اثبت أنه إذا كان f و g بدائيين ، فإن الأمر كذلك فيما يخص جدائهما .

ج) ليكن h كثير حدود معاملاته صحيحة ناطقة ، محتوي h هو تعريفاً القاسم المشترك الأكبر لمعاملاته ، نرمز له بـ $c(h)$.
اثبت أن :

$$c(fg) = c(f)\, c(g) \quad \forall f, g \in \mathbf{Z}[X]$$

(توطئة غوس) .

م **14.** لتكن K حلقة تبديلية، وَ $\mathcal{P}$ مثالياً أولياً لِـ K، و f وَ g كثيريْ حدود معاملاتهما في K. نفرض أن كل معاملات fg تنتمي إلى $\mathcal{P}$. اثبت أن $\mathcal{P}$ يحتوي على كل معاملات f أو كل معاملات g.

م **15.** لتكن K حلقة تامة تبديلية.

أ) ليكن f وَ g كثيري حدود لمتغير واحد، غير ثابتين ومعاملاتهما في الحلقة K. نعتبر في الحلقة $K[X, Y]$ التي تضم كثيرات الحدود لمتغيرين اثنين والتي تنتمي معاملاتها إلى K، نعتبر مثالياً I مولداً عن كثيريْ الحدود $f(X)$ وَ $g(Y)$. اثبت أن لدينا:

$$I \neq K(X, Y]$$

(نفرض أن لدينا علاقة من الشكل:

$$u(X, Y)\, f(X) + v(X, Y)\, g(Y) = 1$$

ثم ندرس الحدود المتجانسة التي لها أعلى درجة في الطرف الأيسر).

ب) لتكن $f_1, ..., f_n$ كثيرات حدود لمتغير واحد معاملاتها في K. اثبت أن مثالي الحلقة $K[X_1 \;, ..., X_n]$ المولد عن: $f_1(X_1), ..., f_n(X_n)$ ليس الحلقة $K[X_1, ..., X_n]$ بأكملها عندما تكون العناصر f_i غير ثابتة.

جـ) اثبت من أجل كل صحيح k بحيث $1 \leq k \leq n$، أن مثالي $K[X_1, ..., X_n]$ المولد عن $X_1, ..., X_k$ أولي. هل هذه المثاليات البالغ عددها n، مختلفة مثنى مثنى؟

م **16.** لتكن K حلقة تبديلية. اثبت أن الخاصيتين التاليتين لِـ K متكافئتان: (1) K لا يقبل عنصراً عديم القوة غير منعدم؛ (2) كل عنصر يقبل القلب في الحلقة $K[X]$ هو عنصر ثابت (راجع التمرين 9 من هذا الفصل والتمرين 1 من الفصل 8؛ نستطيع أيضاً دراسة أوجه الشبه مع التمرين 11 من هذا الفصل).

17. ليكن V وَ W فضاءين شعاعيين بعداهما منتهيان، على حقل تبديلي K. نقول عن تطبيق f من V في W أنه **يكتب على شكل كثير حدود**،

إذا وجد أساس لِـ V وأساس لِـ W بحيث تكون إحداثيات الشعاع $y = f(x)$ من W، معطاة بدلالة إحداثيات الشعاع x من V بواسطة دساتير من الشكل:

$$\eta_j = p_j(\xi_1, \ldots, \xi_m) \qquad (1 \leq j \leq n)$$

حيث ترمز العناصر p_j إلى كثيرات الحدود من $m = \dim(V)$ متغيراً معاملاتها في K. من جهة أخرى نقول أن f **متجانس ومن الدرجة r** إذا كانت كثيرات الحدود p_j متجانسة ومن الدرجة r. اثبت أن هذه التعريفات مستقلة عن الأساسين المختارين في V وَ W (أي أنه إذا كانت الشروط المقدمة متوفرة من أجل إختيار ما لهذين الأساسين، فهي متوفرة من أجل أي إختيار آخر). اثبت أنه إذا كان الحقل K منتهياً، فإن كل تطبيق من V في W يكتب حتماً على شكل كثير حدود (وهو الأمر الذي يقلل من أهمية هذا المفهوم في هذه الحالة...). نفرض فيما يلي أن K غير منته.

نرمز بِـ $S(V, W)$ لمجموعة التطبيقات التي تكتب على شكل كثيرات حدود من V في W، وبِـ $S_r(V, W)$ للمجموعة الجزئية من $S(V, W)$ التي لها عناصر متجانسة ومن الدرجة r. نضع أخيراً:

$$S(V) = S(V, K)\ ,\ S_r(V) = S_r(V, K)$$

تسمى عناصر $S(V)$ [$S_r(V)$ بالترتيب] **التوابع التي تكتب على شكل كثيرات حدود [التوابع التي تكتب على شكل كثيرات حدود متجانسة ومن الدرجة r]** على V.

بين أن كل عنصر f من $S(V, W)$ يكتب بطريقة وحيدة على الشكل:

$$f = f_0 + f_1 + \ldots$$

حيث يكتب f_r على شكل كثير حدود وهو متجانس ومن الدرجة r، مع العلم أن $f_r = 0$ عدا عدداً محدوداً من العناصر f_r.

اثبت أن $S(V)$ حلقة جزئية من حلقة كافة التطبيقات من المجموعة V في الحقل K؛ واثبت أن $S(V)$ يحتوي على التطبيقات الخطية

والتطبيقات الثابتة (التي نطابقها عادة بعناصر K بحيث يصبح K مطابقاً قانونياً لحقل جزئي من الحلقة $S(V)$) . لتكن $f_1,\dots,f_m$ التوابع الإحداثية لـ V بالنسبة لأساس من V ، اثبت أن :

$$S(V) = K[f_1,\dots,f_m]$$

وأن العناصر $f_1,\dots,f_m$ مستقلة جبرياً على K .

اثبت أن $S(V, W)$ فضاء شعاعي جزئي من الفضاء الشعاعي المؤلف من كافة التطبيقات من V في الفضاء الشعاعي W . اثبت أنه إذا كان f في $S(V)$ و g في $S(V, W)$ فإن التطبيق $h = fg$ من V في W المعرف بـ :

$$h(x) = f(x)\, g(x) \qquad \forall x \in V$$

يكتب أيضاً على شكل كثير حدود . استنتج أننا نستطيع النظر لـ $S(V, W)$ كمقياس على الحلقة $S(V)$. ليكن (a_i) أساساً لـ V وَ (b_j) أساساً لـ W ، ونرمز بـ f_{ij} للتطبيق الخطي من V في W الذي يحقق :

$$f_{ij}(a_k) = \begin{cases} b_j & ; k = i \\ 0 & ; k \neq i \end{cases}$$

اثبت أن العناصر f_{ij} تشكل أساساً لـ للمقياس $S(V, W)$ على $S(V)$.

لتكن U ، V ، W ثلاثة فضاءات شعاعية أبعادها منتهية ، على K ، وليكن :

$$f : U \to V \ ; \ g : V \to W$$

تطبيقين يكتبان على شكل كثيري حدود . اثبت أن التطبيق المركب $g \circ f$ يكتب على شكل كثير حدود . إذا كان f وَ g متجانسين ودرجتاهما r وَ s ، فإن $g \circ f$ متجانس ودرجته rs .

18. ليكن K حقلاً تبديلياً غير منته . نعتبر التطبيق الذي يكتب على شكل كثير حدود f من K في K^3 المعطى بـ :

$$f(t) = (t^2 + t + 1,\ t^3 + t + 1,\ t^4 + t + 1)$$

أوجد كافة التوابع التي تكتب على شكل كثيرات حدود على K^3 والتي تنعدم عند كل نقطة من $f(K)$. ما هي نقاط K^3 التي تنعدم عندها هذه التوابع ؟

نفس السؤال بخصوص التطبيق من K^* في K^3 ، المعطى بـ :

$$f(t) = \left(\frac{t+1}{t}, \frac{t^2+1}{t}, \frac{t^3+1}{1}\right)$$

م 19. لتكن K حلقة تبديلية و M مقياساً على K ؛ نريد «تعطيس» M في مقياس على الحلقة $K[X]$ التي تضم كثيرات الحدود لمتغير واحد ، والتي تنتمي معاملاتها إلى K .

من أجل ذلك ، نعتبر المجموعة التي نرمز لها بـ $M[X]$ ، وهي مجموعة المتتاليات :

$$(m_0, m_1, ...)$$

المكونة من عناصر من M منعدمة كلها تقريباً ؛ نعرف عملية جمع في $M[X]$ بالدستور :

$$(m'_0, m'_1, ...) + (m''_0, m''_1, ...) = (m'_0 + m''_0, m'_1 + m''_1, ...)$$

ونعرف عملية ضرب عنصر من $M[X]$ في عنصر من $K[X]$ بوضع :

$$(a_0, a_1, a_2, ...) \cdot (m_0, m_1, m_2, ...) = (a_0 m_0, a_0 m_1 + a_1 m_0, ...)$$

اثبت أن هذه التعريفات تجعل من $M[X]$ مقياساً على $K[X]$ ، نسميه **مقياس كثيرات الحدود لمتغير واحد ، معاملاتها في M** . نطابق كل عنصر m من M بالعنصر $(m, 0, ...)$ من $M[X]$ ؛ اثبت أن لدينا :

$$(m_0, m_1, m_2, ...) = m_0 + m_1 X + m_2 X^2 + ...$$

في المقياس $M[X]$ على $K[X]$ (تنبيه - نكتب هنا السلميات ، أي عناصر $K[X]$ على يمين عناصر $M[X]$ ، وذلك طبقاً للتقليد الذي يقضي بكتابة المعاملات على يسار وحيدات الحد في كثيرات الحدود) .

ليكن M و N مقاسين على K و u تماثلاً من M في N ؛ أثبت أنه يوجد تماثل وحيد :

$$\bar{u} : M[X] \rightarrow N[X]$$

للمقاسين $M[X]$ و $N[X]$ على $K[X]$ ، بحيث $\bar{u}$ يكون مساوياً لـ u على M

نفرض أن M حر ومن صنف منته . اثبت أن $M[X]$ مقياس حر ومن صنف منته على $K[X]$ ، وأن كل أساس لـ M على K ، أساس أيضاً لـ $M[X]$ على $K[X]$.

بخصوص تطبيق الانشاءات السابقة أنظر التمرين 10 من الفصل 15 .

م 20. ليكن K حلقة تبديلية و E مقياساً على K و u تماثلاً داخلياً لـ E . ليكن كثير الحدود :

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$$

الذي تنتمي معاملاته إلى K . نضع :

$$f(u) = a_0 \cdot I_E + a_1 u + \ldots + a_n u^n$$

ومنه يأتي تماثل داخلي جديد لـ E . بعد هذا نعتبر التطبيق من مجموعة الجداء $K[X] \times E$ في المجموعة E المعطى بـ :

$$(f, x) \rightarrow f(u)(x)$$

اثبت أن المجموعة E مقياس على الحلقة $K[X]$ عندما نزودها بقانون التشكيل $(x, y) \rightarrow x + y$ وبالتطبيق المعرف أعلاه ؛ نرمز لهذه المجموعة بـ E_u .

بخصوص القضية العكسية ، نفرض أن M مقياس على $K[X]$ ، وليكن E المقياس على K المستخرج من M باقتصار السلميات(*) على

(*) ليكن L حلقة و K حلقة جزئية منه و M مقياس من اليسار على L . نحصل على المقياس المستخرج من M باقتصار السلميات على K ، باعتبار الزمرة الجمعية M والتطبيق : $(a, m) \rightarrow am$ من $K \times K$ في M الذي ينطبق على $K \times M$ ، مع التطبيق من $L \times M$ في M المعطى في اطار بنية المقياس

الحلقة K ، نعتبر التحاكي الذي نسبته X في M كتطبيق u من E في E .

اثبت أن u تماثل داخلي للمقياس E على K ، وأن $M = E_u$. أي أن مقياساً على الحلقة $K[X]$ يتطابق مع ثنائية مؤلفة من مقياس على الحلقة K ومن تماثل داخلي u لهذا المقياس على K . تعني هذه النتيجة أن دراسة التماثلات الداخلية لمقاييس على K ترجع إلى دراسة المقاييس على $K[X]$ ، وهو ما سنتأكد منه من خلال تمارين الفصل 8)

نعتبر E و u كما وردا أعلاه ، ما هي المقاييس الجزئية للمقياس E_u على $K[X]$ ؟

نعتبر مقياسين E و F على K وتماثلاً داخلياً u لـ E وتماثلاً داخلياً v لـ F ما هي التماثلات من المقياس E_u على $K[X]$ في المقياس F_v على $K[X]$ ؟

م 21. بتقليد إنشاءات التمرين السابق ، اثبت أنه إذا كانت K حلقة تبديلية ، فإن المقاييس على حلقة كثيرات الحدود $K[X, Y]$ تتطابق مع الثلاثيات (E, u, v) المؤلفة من مقياس E على K ومن تماثلين داخليين u و v لـ E بحيث : $u \circ v = v \circ u$. أدرس تعميم ذلك إلى n متغير.

م م 22. ليكن L حقلاً تبديلياً و K حقلاً جزئياً من L.

أ) نعتبر جملة معادلات خطية :

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

معاملاتها وأطرافها الثانية في K . نعتبر كثير حدود p معاملاته في K وعدد متغيراته n . نفرض وجود حل :

M على L . بعبارة أخرى [illegible] التحاكيات التي [illegible] إلى K . كل فضاء [illegible] حقيقياً .

$$(x_1, ..., x_n) \in L^n$$

بحيث $p(x_1, ..., x_n) \neq 0$ ؛ اثبت أنه إذا كان K غير منته ، فإنه يوجد في K^n حل لـ(*) لا ينعدم عنده p (مثال : $\mathbf{R}$ وَ $\mathbf{C}$) .

ب) نعتبر مصفوفتين A وَ B في $M_n(K)$. نفرض وجود مصفوفة V من $GL(n, L)$ بحيث $B = VAV^{-1}$ ؛ اثبت أنه يوجد U في $GL(n, K)$ بحيث $B = UAU^{-1}$ (اعتبر المعادلة $UA = BU$ مع الشرط $\text{dét}(U) \neq 0$ وطبق السؤال السابق) . [تنبيه - تبقى هذه النتيجة قائمة عندما يكون K منتهياً ، لكن البرهان في هذه الحالة أصعب بكثير من الحالة الأولى ، أنظر التمرين 13] .

م23. لتكن K حلقة تبديلية وَ I مثالياً من $K[X]$ مولداً عن X^{n+1} . صف حلقة النسبة $L = K[X]/I$ (اثبت أن L مولد عن K وعن عنصر ε يخضع للعلاقة $\varepsilon^{n+1} = 0$) .

أوجد عناصره القابلة للقلب [نجد الحلقة L ، من أجل $K = \mathbf{C}$ ، في نظرية النشر المحدود من الرتبة n] .

م 1. نعتبر كسرين ناطقين f وَ g من $K(X_1, ..., X_n)$ حيث K حلقة تامة تبديلية غير منتهية. نفرض أنه يوجد في المجموعة K^n مفتوح زاريسكي (التمرين 1، ف 27، 28) غير خال A بحيث يكون f وَ g معرفين ويأخذان نفس القيمة عند كل نقطة x من A اثبت عندئذ أن $f = g$.

(تفسر هذه النتيجة، خاصة في الحالة المعروفة $K = \mathbf{R}$ أو $K = \mathbf{C}$، كيف أن من حقنا مطابقة كل كسر ناطق معاملاته في K بالتابع الذي يعرفه على جزء من K^n).

2. لا يقبل تابع ناطق لمتغير واحد أية نقطة عدم تعيين (إذا كان $f = p/q$ حيث p وَ q ينعدمان في آن واحد عند a، اظهر في p أكبر أس ممكن لِـ $X - a$، وكذا في q).

3. ليكن K حقلاً تبديلياً و a عنصراً من K، وَ A مجموعة الكسور الناطقة f في $K(X)$ المعرفة عند a. اثبت أن A حلقة تقييم للحقل $K(X)$ (التمرين 6، ف 8) وأن مثالي العناصر غير القابلة للقلب في A مؤلف من العناصر f من A التي تحقق $f(a) = 0$. اثبت أن العناصر f من $K(X)$ التي يمكن أن نكتبها على الشكل $f = p/q$ حيث p وَ q كثيرا حدود يحققان:

$$d^\circ(p) \leq d^\circ(q)$$

تألف أيضاً حلقة تقييم من $K(X)$.

4. ليكن L حقلاً تبديلياً و K حقلاً جزئياً من L وَ $x_1, ..., x_n$ عناصر من L. نرمز بِـ $K(x_1, ..., x_n)$ لأصغر حقل جزئي من L يحتوي على K والعناصر x_i (هو حقل جزئي من L مولد عن K والعناصر x_i؛ يسمى،

كل حقل يحتوي K ، كحقل جزئي منه ، ومولد عن K وعن عدد منته من العناصر يسمى **توسيعاً من صنف منته** من K كما يسمى أيضاً **حقل توابع جبرية** على K) . اثبت أن هذا الحقل مكون من عناصر L التي يمكن كتابتها على الشكل :

$$f(x_1, \ldots, x_n)$$

حيث f عنصر من $K(X_1, \ldots, X_n)$ معرف عند $(x_1, \ldots, x_n)$. اثبت أن $K(x_1, \ldots, x_n)$ متشاكل مع $K(X_1, \ldots, X_n)$ عندما تكون العناصر x_i مستقلة جبرياً على K .

م 5. ليكن K حقلاً تبديلياً . نعتبر كسراً ناطقاً f من $K(X)$ ولاينتمي إلى K . اثبت أن العنصر X من الحقل $K(X)$ جبري على الحقل الجزئي $K(f)$ المولد عن K و f . استنتج أن الأمر كذلك فيما يخص كل g من $K(X)$.

اثبت أنه إذا كان p و q كثيري حدود من $K[X]$ ، توجد علاقة جبرية غير تافهة ، معاملاتها في K ، تربط p بـ q .

م م 6. ليكن L حقلاً تبديلياً و K حقلاً جزئياً من L .

أ) لتكن $x_1, \ldots, x_r, y, z$ عناصر من L ؛ نفرض أن z جبري على الحقل الجزئي $K(x_1, \ldots, x_r, y)$ وغير جبري على $K(x_1, \ldots, x_r)$ ؛ اثبت عندئذ أن y جبري على :

$$K(x_1, \ldots, x_r, z)$$

ب) نفرض أن **درجة تسامي** L **منتهية** على K ، أي أنه يوجد صحيح n بحيث تحقق كافة عناصر أية مجموعة جزئية مؤلفة من $n + 1$ عنصراً ، تحقق علاقة جبرية غير تافهة معاملاتها في K . اثبت أننا نستطيع إيجاد عناصر $x_1, \ldots, x_r$ من L ، عددها منته ، مستقلة جبرياً على K وبحيث يكون كل عنصر من L جبرياً على الحقل الجزئي $K(x_1, \ldots, x_r)$ (نقول عندئذ أن العناصر x_i تشكل أساس تسام لِـ L على K) .

ج) ليكن $x_1, \ldots, x_r$ أساس تسام لِـ L على K ، وكذا $y_1, \ldots, y_s$ اثبت أنه يوجد دليل j بحيث يكون y_j غير جبري على

$K(x_1, \dots, x_{r-1})$ لاحظ أنه إذا كان الأمر عكس ذلك فإن كل عنصر من L يصبح جبرياً على هذا الحقل الجزئي بما في ذلك العنصر x_r). استنتج بواسطة السؤال أ) أن العناصر $x_1, \dots, x_r$ تؤلف أساس تسام لـ L على K. د) استنتج من ذلك أن لأساسي تسام كيفيين لـ L على K نفس عدد العناصر (يسمى هذا العدد درجة التسامي لـ L على K).

اثبت أن هذا العدد هو أكبر صحيح n بحيث نستطيع إيجاد n عنصراً من L مستقلة جبرياً على K.

ر) اثبت أنه إذا كانت $f_1, \dots, f_{n+1}$ كسوراً ناطقة لـ n متغيراً (عدد هذه الكسور يساوي $(n+1)$)، معاملاتها في حقل تبديلي K، فإنه توجد علاقة جبرية غير تافهة، معاملاتها في K، تربط الكسور $f_1, \dots, f_{n+1}$ ببعضها البعض.

س) نفرض أن الحقل التبديلي K غير منته. ليكن A مفتوحاً لزاريسكي (التمرين 1، ف 27، 28) غير خال في K^p. نقول عن تطبيق f من A في K^q أنه ناطق إذا وجدت كسور ناطقة:

$$f_1, \dots, f_q \in K(X_1, \dots, X_p)$$

بحيث تكون $f_1, \dots, f_q$ معرفة عند كل x من A وبحيث:

$$f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_q(x)\right) \quad \forall x \in A$$

(يعمم هذا المفهوم مفهوم التطبيقات التي تكتب على شكل كثيرات حدود الواردة في التمرين 17، ف 27، 28). أثبت أنه إذا كان تطبيق ناطق من A في K^q غامراً فإن $q \leq p$. (تبين هذه النتيجة أن الظواهر «الغريبة» من نوع منحنى بيانو - المتعلق بوجود تطبيق مستمر من مستقيم على مستو مثلاً - لا يمكن أن تقع عندما نقتصر على التطبيقات المعرفة بواسطة التوابع التي تكتب على شكل كثيرات حدود أو التوابع الناطقة).

[يعتبر مفهوم درجة التسامي المعروض في هذا التمرين منطلق لتعريف بعد منوعة جبرية].

لتكن V **منوعة جبرية** في $\mathbf{C}^n$، أي جزء من $\mathbf{C}^n$ معرفاً بعدد منته من المعادلات:

$$f_1(x) = \ldots = f_r(x) = 0$$

حيث $f_1, \ldots, f_r$ كثيرات حدود لـ n متغيراً، معاملاتها في $\mathbf{C}$. نقول عن تابع أنه يكتب على شكل كثير حدود على V، إذا كان تطبيقاً من V في $\mathbf{C}$ مساوياً لإقتصار تابع يكتب على شكل كثير حدود على $\mathbf{C}^n$. تشكل التوابع التي تكتب على شكل كثيرات حدود على V، حلقة A تحتوي $\mathbf{C}$ (توابع ثابتة) وهو مولد عن n عنصراً حسنة الإختيار في $\mathbf{C}$ (نستطيع مثلاً إختيار الإقتصارات على V للتوابع الإحداثية لـ $\mathbf{C}^n$). نقول عن V إنها **غير قابلة للإختزال** إذا كانت الحلقة A تامة؛ يمكن أن نبرهن على أن ذلك يعود إلى إفتراض أن V لا يكتب على شكل إتحاد لمنوعتين جبريتين مختلفتين أخريين من V. إذا كانت V غير قابلة للاختزال، فإننا نستطيع تشكيل حقل L مؤلف من كسور A؛ نرمز بـ $f_1, \ldots, f_n$ لاقتصارات التوابع الإحداثية لـ $\mathbf{C}^n$، على V؛ من الواضح أن:

$$L = \mathbf{C}(f_1, \ldots, f_n)$$

نقول عن L إنه **حقل التوابع الناطقة للمنوعة** V. إن درجة تساميه منتهية على $\mathbf{C}$، عندئذ يكون **بعد** V هو تعريفاً درجة تسامي L على $\mathbf{C}$. وهكذا نجد أن أبعاد «المنحنيات» تسوي 1 وأبعاد «السطوح» تساوي 2. الخ . . .

نبرهن على أن البعد p لمنوعة جبرية غير قابلة للاختزال تساوي أيضاً أكبر صحيح بحيث نستطيع إنشاء متتالية منتهية (V_i) من المنوعات الجبرية غير القابلة للإختزال وغير الخالية والمختلفة مثنى مثنى:

$$V_0 \subset V_1 \subset \ldots \subset V_p = V$$

«فالسطح» مثلاً يحتوي «منحنياً» الذي يحتوي بدوره «نقطة» وهو الأمر الذي يفسر (كذا) كيف أن بعد «سطح» يساوي 2.

إن المنوعات الجبرية في $\mathbf{C}^n$ تستعمل في التحليل، خاصة عندما

يتعلق الأمر بدراسة حل المعادلات الخطية ذات المشتقات الجزئية، وذات المعاملات الثابتة. لنعتبر مثلاً المعادلة:

$$\sum_{i_1 + \dots + i_n \leq p} a_{i_1 \dots i_n} \frac{\partial^{i_1 + \dots + i_n} f}{\partial x_1^{i_1} \dots \partial x_n^{i_n}} = 0$$

حيث f تابع مجهول لـ n متغيراً حقيقياً وحيث ترمز $a_{i_1 \dots i_n}$ لمعاملات عقدية منعدمة ما عدا عدداً منتهياً منها. إذا بحثنا عن حلول من الشكل:

$$f(x_1, \dots, x_n) = e^{u_1 x_1 + \dots + u_n x_n}$$

حيث ترمز $u_1, \dots, u_n$ لثوابت عقدية، فإننا نعود بطبيعة الحال إلى حل المعادلة:

$$\sum a_{i_1 \dots i_n} \cdot u_1^{i_1} \dots u_n^{i_n} = 0$$

أي إلى دراسة السطح المصعد الجبري من $\mathbf{C}^n$ المعرف بهذه المعادلة.

7. أوجد أقطاب ونقاط عدم تعيين الكسور الناطقة التالية:

$$\frac{X}{Y}; \frac{X - Y}{XY}; \frac{(X^2 - 1)(Y^2 - 1)}{X^2 + Y^2 - 1}; \frac{X + Y + Z}{X - Y}; \frac{X - Z}{Y - Z}$$

(خذ $\mathbf{C}$ كحقل أساس).

م 8. ليكن K حقلاً تبديلياً، نعتبر (التمرين 11، ف 28, 27) الحلقة $K[[X]]$ المؤلفة من السلاسل الشكلية لمتغير واحد، والتي تنتمي معاملاتها إلى K. لما كانت هذه الحلقة تامة، فإننا نستطيع تشكيل حقل كسورها، الذي نرمز له بـ $K((X))$. أثبت أن كل عنصر من $K((X))$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل جداء قوة (قد تكون سالبة) لـ X بسلسلة شكلية حدها الثابت غير منعدم، أي على شكل «سلسلة»:

$$\sum_{n = -\infty}^{n = +\infty} a_n X^n \qquad (*)$$

معاملاتها a_n في K وبحيث يكون عدد الأعداد الصحيحة السالبة n بحيث $a_n \neq 0$، منتهياً.

نشير إلى أنه لما كانت $K[X]$ حلقة جزئية من $K[[X]]$ ، فإن الحقل $K((X))$ يحتوي حقلاً جزئياً متشاكلاً مع $K(X)$ ولذلك يمكن تمثيل أي كسر ناطق لمتغير واحد معاملاته في K بسلسلة من الشكل (*). أوجد السلسلتين الشكليتين (*) اللتين تمثلان الكسرين الناطقين :

$$\frac{1}{X - X^2} \quad ; \quad \frac{X^2 + X + 1}{X^4 - X^2}$$

اثبت أن السلسلة (*) التي تمثل ناطقاً f لا تحتوي على أي قوة سالبة لِـ X عندما يكون f معرفاً عند $x = 0$ والعكس بالعكس(*). اثبت أن $K[[X]]$ حلقة تقييم (التمرين 6، ف 8) من الحقل $K((X))$.

م9. لتكن A حلقة تبديلية و S جزء من A ؛ نفرض أن S يحتوي 1 لكن لا يحتوي 0 وأن لدينا $xy \in S$ مهما كان x في S وَ y في S (إذا كانت A حلقة تامة فإننا نستطيع أن نأخذ مثلاً المجموعة S مساوية لمجموعة العناصر غير المنعدمة من A ؛ في حالة العامة، نحصل على مثال هام بأخذ S مساوية لمجموعة العناصر x من A التي لا تنتمي إلى مثالي أولي معطى في A) .

أ) لتكن F مجموعة الثنائيات (x, s) حيث $x \in A$ وَ $s \in S$ ؛ إذا كان $y' = (x', s')$ وَ $y'' = (x'', s'')$ عنصرين من F ، نرمز بِـ $R\{y', y''\}$ للعلاقة :

يوجد عنصر s من S بحيث : $s(x' s'' - x'' s') = 0$. اثبت أن R علاقة تكافؤ على F . ماذا يحدث عندما تكون A تامة وتكون S هي مجموعة العناصر غير المنعدمة من A ؟

(*) تعرف العملية التي تمثل، بعد تعاطي كثيري حدود f وَ g من $K[X]$ في كتابة الكسر الناطق f/g على الشكل (*)، تعرف في المؤلفات القديمة باسم قسمه f على g وفق القوى المتزايدة لِـ X ؛ وهي تمثل أيضاً من أجل كل صحيح $r \geq 0$ (وهذا عندما يكون الحد الثابت في g غير منعدم، وهي الحالة التي نستطيع الرجوع إليها دوماً بطريقة بديهية) في إيجاد كثير حدود q درجته ≤ 1 بحيث يكون $f(X) - q)g(x)$ مضاعفاً لِـ x^{r+1} نحصل على كثير الحدود q بإزالة الحدود التي درجاتها $> r$ في السلسلة (*) الممثلة لِـ f/g .

من الناحية العملية يجب إجراء هذه العمليات عندما نريد نشر نسبة كثيره حدود أو سلسلتين صحيحتين حسب سلسلة صحيحة أو حسب سلسلة لوران، أو عندما نريد إيجاد النشر المحدود للنسبة السالفة الذكر.

ب) لتكن A_s مجموعة النسبة F/R و θ التطبيق القانوني من F على F/R . اثبت أنه توجد على A_s بنية حلقة تبديلية وحيدة بحيث تتحقق العلاقتان :

$$\theta(x, s) + \theta(y, t) = \theta(xt + ys, st)$$

$$\theta(x, s) \cdot \theta(y, t) = \theta(xy, st)$$

ج) اثبت أن التطبيق j من A في A_s المعطى بِـ :

$$j(x) = \theta(x, 1)$$

تماثل حلقتين وأن $j(s)$ يقبل القلب في A_s مهما كان s في S ، وأن كل عنصر من A_s يساوي نسبة عنصر $j(x)$ ، $(x \in A)$ ، على عنصر $j(s)$ ، $(s \in S)$. ما هي نواة التماثل j؟ ما هو الشرط الذي يجعل j متباينا؟

د) ليكن f تماثلاً من A في حلقة تبديلية K . لكي يكون $f(s)$ قابلاً للقلب في K مهما كان s في S ، يلزم ويكفي أن يكون f مركباً من التماثل j الوارد في السؤال اسابق ومن تماثل من الحلقة A_s في الحلقة K .

ر) لتكن A حلقة تامة تبديلية وَ K حقل كسوره و $\mathcal{P}$ مثالياً أولياً من A (أي بحيث $\mathcal{P} \neq A$ وبحيث تكون العلاقة $xy \in \mathcal{P}$ مستلزمة لِـ $x \in \mathcal{P}$ أو $y \in \mathcal{P}$) ؛ نأخذ S مساوياً لمتمم $\mathcal{P}$ في A . اثبت أن الحلقة A_s متشاكلة مع الحلقة الجزئية $A_{\mathcal{P}}$ من K المؤلفة من الكسور التي تكتب على الشكل x/y حيث $x \in A$ ، $y \in A$ وَ $y \notin \mathcal{P}$.

س) نحتفظ بفروض ر) ونلحق بكل مثالي $\mathcal{A}$ ، من الحلقة $A_{\mathcal{P}}$ ، يخالف $A_{\mathcal{P}}$ نفسه ، المثالي $A \cap \mathcal{A}$ من الحلقة A . اثبت أننا نحصل بهذه الطريقة على تباين من مجموعة المثاليات لِـ $A_{\mathcal{P}}$ المخالفة لِـ $A_{\mathcal{P}}$ ، في مجموعة مثاليات A المحتواة في $\mathcal{P}$. ما هو التطبيق المعاكس؟

ص) ليكن A حقلاً تبديلياً وَ $a_1, \ldots, a_n$ عناصر من L . نأخذ :

$$A = L[X_1, \ldots, X_n]$$

و P مجموعة كثيرات الحدود من f من A بحيث $f(a_1, \dots, a_n) = 0$.
اثبت أن A_P هي مجموعة الكسور الناطقة $f(X_1, \dots, X_n)$ ، التي تنتمي معاملاتها إلى L والمعرفة عند النقطة $(a_1, \dots, a_n)$ من K^n .

ط) عمم نتائج السؤال س) ليشمل حالة حلقة كسور A_s كيفية .

10. لتكن A حلقة تامة تبديلية و K حقل كسوره . اثبت أن حقل كسور حلقة كثيرات الحدود $A[X]$ متشاكلة قانونياً مع حقل الكسور الناطقة $K(X)$.

م 11. لتكن A حلقة تامة تبديلية ، و M مقياساً على A وَ K حقل كسور A . نريد أن نبرهن على أنه إذا كان M بدون التواء (التمرين 11 ، ف 10 ؛ لن نستعمل نتائج هذا التمرين في هذا المكان) فإننا نستطيع «تغطيس» M في فضاء شعاعي على K (مثال تافه : يمكن تغطيس A^n في K^n) .

لا نفرض أي شرط على M وهذا حتى وقت لاحق .

أ) لتكن F مجموعة الثنائيات (m, s) حيث $m \in M$ وَ $s \in A$ وَ $s \neq 0$. لتكن $x' = (m', s')$ وَ $x'' = (m'', s'')$ عنصرين من F ، نرمز بـ : $R\{x', x''\}$ للعلاقة :

يوجد عنصر s من A بحيث : $s(s'm'' - s''m') = 0$ وَ $s \neq 0$.
اثبت أن R علاقة تكافؤ على المجموعة F .

ب) ليكن V مجموعة النسبة F/R ؛ نرمز بـ θ للتطبيق القانوني من F على V . اثبت أننا نستطيع تعريف مجموع عنصرين من V بحيث :

$$\theta(m', s') + \theta(m'', s'') = \theta(s''m' + s'm'', s's'')$$

مهما كان (m', s') وَ (m'', s'') في F ، وبين أن V زمرة تبديلية عند تزويدها بهذا القانون التشكيلي .

ج) اثبت وجود تطبيق $(\lambda, x) \to \lambda x$ من $K \times V$ في V يحقق الشرط التالي : إذا كان $\lambda = u/s$ وَكان $x = \theta(m, t)$ (حيث u ، s ، t تنتمي إلى A وَ m ينتمي إلى M وَ s وَ t غير منعدمين) ، لدينا :

$$\lambda x = \theta(xm, x)$$

اثبت أن هذه الزمرة التبديلية V ، فضاء شعاعي على K عند تزويدها بقانون التشكيل المتمثل في التطبيق السالف الذكر.

د) نعرف تطبيقاً «قانونياً» f من M في V بـ :

$$f(m) = \theta(m, 1)$$

اثبت أنه تماثل مقياسين على A (تنبيه : لما كان V فضاء شعاعياً على K ، فإننا نستطيع النظر إلى V كمقياس على A) ، وأنه نسوي مقياس الإلتواء الجزئي من M (أي مجموعة العناصر m بحيث $sm = 0$ على الأقل من أجل عنصر s من A غير منعدم).

استنتج أنه إذا كان M بدون إلتواء فإن f تشاكل من M على مقياس جزئي من V . مثال (باعتبار $A = Z$) : نستطيع «تغطيس» كل زمرة تبديلية بدون إلتواء في فضاء شعاعي ناطق.

ر) نفرض M بدون إلتواء ومن صنف منته. اثبت أن بعد V منته على K . لتكن $n = \dim(V)$ (نقول عن n أنه مرتبة M) اثبت وجود أساسين $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ و $(b_i)_{1 \leq i \leq n}$ بحيث نجد أن $P \subset M \subset Q$ عندما نرمز بـ P و Q للمقياسين الجزئيين (على A والمتشاكلين مع A^n) من V المولدين بالترتيب عن (a_i) و (b_i).

س) استنتج من ذلك ومن النظرية 3 من ف 18 النتيجة التالية : إذا كانت A حلقة رئيسية ، فإن كل مقياس M على A من صنف منته وبدون إلتواء ، متشاكل حتماً مع A^n حيث يرمز n لمرتبة M. وضح ذلك لما $A = Z$.

ص) ليكن M مقياساً من صنف منته على حلقة رئيسية A. ليكن T مقياس الإلتواء الجزئي من M. اثبت أن M/T حر ومن صنف منته. استنتج (بواسطة التمرين 8 من ف 17) أن M متشاكل مع الجداء المباشر لـ T ولمقياس حر من صنف منته على A. (ترد هذه النتيجة دراسة المقاييس من الصنف المنتهي إلى دراسة مقاييس

الإلتواء ذات الصنف المنتهي ، وهي الدراسة التي سنقوم بها ضمن التمارين 8 ، 9 ، 10 من الفصل 31) .

ط) ليكن M مقياساً حراً من صنف منته على حلقة رئيسية A و M' مقياساً جزئياً من M . اثبت أن الخاصيات التالية متكافئة : (1) M' عامل مباشر في M ، (2) مقياس النسبة M/M' بدون التواء (3) مهما كان a من A و x من M فإن العلاقة $ax \in M'$ تستلزم $a = 0$ أو $x \in M'$. استخلص من ذلك نتيجة التمرين 2 ، ف 18 .

ع) لتكن M' زمرة جزئية من Z^n معرفة بجملة معادلات خطية متجانسة ، معاملاتها صحيحة . اثبت أن كل أساس لـ M' جزء من أساس لـ Z^n .

12. نجد في كتاب مدرسي خاص بالجبر وموجه لتلاميذ الثانويات والمتوسطات الجملة التالية «إذا لم نأخذ المتغيرات مساوية لقيم تعدم البسط والمقام ، فإن مجموعة الكسور الناطقة تمثل بنية حقل ، عند تزويدها بقانون جمع وقانون ضرب» ما رأيك في هذا النص؟

1. ليكن K حقلاً تبديلياً مميزته تساوي 0 (الحقل $\mathbb{C}$ مثلاً). أثبت أن المعادلة:

$$\frac{X^n}{n!} + \frac{X^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 = 0$$

لا تقبل أي جذر مضاعف في K.

2. ليكن K حقلاً تبديلياً. أوجد كثير حدود f في $K[X]$ درجته 7 بحيث يكون 1 جذراً مضاعفاً من الرتبة 4 على الأقل لـ $f(X) + 1$، ويكون -1 جذراً مضاعفاً من الرتبة 4 على الأقل لـ $f(X) - 1$. عمّم بحيث بتعويض 4 و 7 بـ n و $2n - 1$.

3. تقبل كل كثيرات الحدود الموالية 1 كجذر لها، عيّن رتبة مضاعفته:

$$X^{2n} - nX^{n+1} + nX^{n-1} - 1;$$

$$X^{2n+1} - (2n+1)X^{n+1} + (2n+1)X^{n} - 1$$

$$X^{2n} - n^2 X^{n+1} + 2(n^2 - 1)X^{n} - n^2 X^{n-1} + 1$$

4. ليكن f كثير حدود معاملاته في حقل تبديلي K. نفرض $f' = 0$. أثبت أن f ثابت عندما تكون مميزة K تساوي 0، وأن f كثير حدود لـ X^p عندما تكون مميزة K تساوي $p \neq 0$. أدرس القضية العكسية.

م5. ليكن K حقلاً تبديلياً مميزته تخالف 0. نريد أن نجد كل التطبيقات:

$$t \mapsto U(t)$$

من K في الحقل $M_n(K)$، التي تحقق:

$$U(x+y) = U(x)\,U(y) \qquad \forall x, y \in K$$
$$U(0) = 1_n$$

علماً بأن هذه التطبيقات تكتب على شكل كثيرات حدود أي :

$$U(t) = A_0 + A_1 t + \ldots + A_r t^r + \ldots$$

حيث تنتمي المصفوفات A_r لـ $M_n(k)$ وهي منعدمة ما عدا عدداً محدوداً منها .

أ) اثبت أن المشتق $U'(t)$ للتابع $U(t)$ يحقق :

$$U'(t) = A_1 \cdot U(t)$$

ب) اثبت أن المصفوفة $A_1 = N$ معدومة القوة وأن :

$$U(t) = \sum_{r \geq 0} N^r \frac{t^r}{r!} = \exp(tN)$$

(راجع التمرين 2 ، ف 8) .

جـ) بخصوص القضية العكسية ، بيّن أن التطبيق :

$$t \to \exp(tN)$$

يحقق الشروط المطلوبة ، من أجل كل مصفوفة معدومة القوة N .

د) أوجد المصفوفة N في الحالة التي يكون فيها التابع $U(t)$ معطى بالشكل الوارد في التمرين 11 ، ف 12 . وتحقق عندئذ من أن $U(t) = \exp(tN)$.

6. ليكن K حقلاً تبديلياً مميزته تساوي 0 . اثبت أنه لا يوجد أي كثير حدود غير منعدم يحقق :

$$f(x+y) = f(x)\,f(y)$$

مهما كان x و y في K . نفس السؤال فيما يخص العلاقة :

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

ما هي كثيرات الحدود التي تحقق :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

م7. ليكن K حقلاً مميزته $p \neq 0$.

أ) اثبت أن :

$$(x+y)^p = x^p + y^p$$

مهما كان x ، y في K . استنتج ، بصفة أعم ، أن :

$$(x+y)^q = x^q + y^q$$

عندما يكون q مساوياً لقوة من p .

ب) اثبت أن التطبيق $x \to x^p$ تشاكل من K على حقل جزئي من K (نرمز له بـ K^p) . اثبت أن $K^p = K$ عندما يكون K منتهياً .

ج) ماهي كثيرات الحدود f من $K[X]$ التي تحقق :

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

مهما كان x وَ y في K .

م8. ليكن K حقلاً مميزته $p \neq 0$. اثبت أن ، من أجل n في $\mathbf{Z}$ وَ x في K ، العنصر nx من K لا يتعلق إلاّ بـ x وبصف n وفق p . استنتج أننا نستطيع اعتبار K كفضاء شعاعي على الحقل $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$.

اثبت أن عدد عناصر حقل منته مميزته p ، يساوي حتماً قوة لـ p .

9. ليكن p عدداً أولياً . اثبت أن المعامل الثنائي الحد $\binom{p^n}{r}$ يقبل القسمة على p مهما كان $n \geq 1$ ، و r بحيث $1 \leq r \leq p^n - 1$. (استعمل التمرين 7 باعتبار الحقل $K = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$) . أوجد برهاناً أولياً .

10. ليكن $f(X_1, ..., X_n)$ كثير حدود لـ n متغير ، معاملاته في حلقة تبديلية K . نفرض أن f متجانس ودرجته r . اثبت أن :

$$X_1 f'_1(X_1, ..., X_n) + ... + X_n f'_n(X_1, ..., X_n) = r \cdot f(X_1, ..., X_n)$$

حيث يرمز f'_i لمشتق f الجزئي بالنسبة لـ X_i . هل تميز هذه العلاقة (المعروفة باسم متطابقة أويلر) كثيرات الحدود المتجانسة من الدرجة r ؟

11. لتكن :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (*)$$

معادلة جبرية معاملاتها a_i صحيحة ناطقة ؛ نفرض فيما يلي أن العناصر a_i أولية فيما بينها (وهي الحالة التي يمكن الرجوع إليها دوماً بقسمة العناصر a_i على أكبر قاسم مشترك لها) .

ليكن $x = p/q$ جذراً ناطقاً للمعادلة (*) ؛ نفرض أن p وَ q أوليان فيما بينهما . اثبت أن p يقسم a_0 وأن q يقسم a_n .

تطبيق : أوجد الجذور الناطقة للمعادلات التالية :

$$6x^4 - 11x^3 - x^2 - 4 = 0$$

$$2x^3 + 12x^2 + 13x + 15 = 0$$

$$6x^5 + 11x^4 - x^3 + 5x - 6 = 0$$

$$x^6 + 3x^5 + 4x^4 + 3x^3 - 15x^2 - 16x + 20 = 0$$

$$2x^6 + x^5 - 9x^4 - 6x^3 - 5x^2 - 7x + 6 = 0$$

12. لتكن K حلقة تبديلية نعتبر الحلقة $L = K[\varepsilon]$ المولدة عن K وعن عنصر ε بحيث :

$$\varepsilon^2 = 0$$

(ضع $n = 1$ في التمرين 23 من ف 28) . لكي يكون التطبيق

$$x \to x + D(x)\varepsilon$$

من K في L ، تماثلاً يجب ويكفي أن يكون D اشتقاقاً للحلقة K .

13. ما هي الحقول التي تتحقق فيها المتطابقة :

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - 5x + 1)(x^2 + 5x + 1)$$

م **14.** ليكن K حقلاً مميزته $p \neq 0$. إذا كان x في K يحقق $x^n = 1$ من أجل صحيح n ، فإنه يوجد صحيح r لا يقبل القسمة على p بحيث :

$$x^r = 1$$

م **15.** لتكن K حلقة تبديلية نعرف (بالتدريج على الصحيح $n \geq 0$)

المؤثرات التفاضلية من الرتبة n على الأكثر، على K بالطريقة التالية : هي تطبيقات D من K في K تحقق :

$$D(x+y) = D(x) + D(y) \quad ; \forall x, y \in K$$

وتتمتع من جهة أخرى بالخاصية التالية : إذا كان $n = 0$ ، فإنه يوجد عنصر a من K بحيث :

$$D(x) = ax \qquad \forall x \in K$$

أما إذا كان $1 \leq n$ ، فإنه يوجد، من أجل كل x في K ، مؤثر تفاضلي D_x من الرتبة $n-1$ على الأكثر على K ، بحيث :

$$D(x, y) = x \cdot D(y) + D_x(y) \qquad \forall y \in K$$

أ) عيّن كل المؤثرات التفاضلية من الرتبة 1 على الأكثر، على K .

ب) اثبت أنه إذا كان D' وَ D'' مؤثرين تفاضليين، رتبتاهما r وَ s على الأكثر فإن التطبيق المركب :

$$D'' \circ D'$$

مؤثر تفاضلي من الرتبة $r+s$ على الأكثر، وقوسي جاكوبي

$$D'' \circ D' - D' \circ D''$$

مؤثر تفاضلي من الرتبة $\pi + s - 1$ على الأكثر.

ج) ليكن D مؤثراً تفاضلياً من الرتبة n على الأكثر. نعتبر جماعة $(x_i)_{i\in I}$ من عناصر K ، حيث $\text{card}(I) = n+1$. من أجل كل جزء F من I نضع :

$$x_F = \prod_{i \in F} x_i \ ; \ x_0 = 1$$

اثبت أن لدينا المتطابقة :

$$\sum_{F \subset I} (-1)^{\text{card}(F)} x_F \, D(x_{I-F}) = 0$$

فيما يخص القضية العكسية ، بيّن أن كل تطبيق D من K في K يتمتع بهذه الخاصة ويحقق $D(x + y) = D(x) + D(y)$ هو حتماً مؤثر تفاضلي من الرتبة n على الأكثر ، في K .

د) استنتج من ذلك دستوراً لحساب المشتقات الجزئية من الرتبة p لجداء ذي $n + 1$ كثير حدود ؛ وهذا بالتدريج على n . أدرس الحالة $p = 1$.

ر) نأخذ :

$$K = k[X_1, \ldots, X_r]$$

حيث يرمز k لحلقة تبديلية . أنشئ كل المؤثرات التفاضلية في K المعدومة على k .

1. لتكن $x_1, \dots, x_n$ عناصر غير منعدمة من حلقة رئيسية K وَ d واحداً من أكبر القواسم المشتركة لهذه العناصر؛ نختار $u_1, \dots, u_n$ في K بحيث $d = u_1 x_1 + \dots + u_n x_n$. اثبت أن $u_1, \dots, u_n$ أولية فيما بينها.

م2. ليكن M مقياساً حراً ومن صنف منته على حلقة رئيسية K و a عنصراً غير منعدم من M . اثبت أن الخاصيات الخمس التالية متكافئة: a عنصر من أساس لِـM؛ يوجد شكل خطي f على M بحيث $f(a) = 1$؛ إحداثيات a بالنسبة لأساس لِـM أولية فيما بينها؛ إحداثيات a بالنسبة لكل أساس لِـM أولية فيما بينها؛ إذا كان $a = ux$ من أجل عنصر u في K وعنصر $x \neq 0$ ينتمي إلى M، فإن u يقبل القلب؛ إذا كان $ux = va$ حيث u و v في K وَ x عنصر من M غير منعدم، فإن v من مضاعفات u . (نستعمل التمرين 2، ف 18 والتمرين 11 الفرع (ط) من ف 29) . نقول عن الشعاع a المنتمي لِـM والمحقق للشروط السابقة، أنه بدائي.

3. ليكن M مقياساً حراً ومن صنف منته على حلقة رئيسية K . اثبت أن كل $x \in M$ مضاعف، على الأقل، لشعاع بدائي من M . المطلوب إجراء الحسابات باعتبار $K = \mathbf{Z}$ وَ $M = \mathbf{Z}^4$ وَ $x = (126, 210, 168, 504)$.

4. لتكن $a_1, \dots, a_n$ عناصر من حلقة رئيسية K؛ لكي توجد مصفوفة:

$$U \in GL(n, K)$$

سطرها الأول (عمودها الأول، بالترتيب) $a_1, \dots, a_n$ يلزم ويكفي أن

تكون $a_1, \ldots, a_n$ أولية فيما بينها يمكن حينئذ إختيار U بحيث يكون $\text{dét}(U) = 1$ ، أي إفتراض :

$$U \in SL(n, K)$$

5. أنشئ مصفوفة U في $SL(3, Z)$ عمودها الأول $2, 3, 4$.

6. أنشئ مصفوفة U في $SL(3, Z)$ عمودها الثاني $2, 3, 4$.

م **7.** ليكن M مقياساً حراً ومن صنف منته على حلقة رئيسية K .

أ) اثبت أنه إذا كان a عنصراً غير منعدم من M فإن أكبر قاسم مشترك لإحداثيات a بالنسبة لأساس لِـ M ، مستقل عن إختيار هذا الأساس . ما هو التفسير «الهندسي» لهذه النتيجة (راجع التمرين 3) ؟

ب) ليكن M' مقياساً جزئياً ، غير منعدم ، من M . نختار أساساً لِـ M ونعتبر مثالي K المولد عن كل إحداثيات عناصر M' . اثبت أن هذا المثالي مستقل عن إختيار الأساس . اثبت أنه مولد عن إحداثيات مجموعة كيفية من مولدات M' . [يسمى هذا المثالي ، وكذلك كل مولد من مولداته ، أول عامل لامتغير من M' في M ؛ أنظر التمرين الموالي .]

م م **8.** ليكن M مقياساً حراً ومن صنف منته على حلقة رئيسية K وَ M' مقياساً جزئياً غير منعدم ، من M ؛ نرمز بِـ n وَ r لمرتبتي (ونعني بذلك عدد عناصر أساس) M وَ M' . نريد البرهان على النتيجة التالية : يوجد أساس $a_1, \ldots, a_n$ لِـ M وعناصر $d_1, \ldots, d_r$ من K بحيث تشكل الأشعة $d_1 a_1, \ldots, d_r a_r$ أساساً لِـ M' ويكون d_i قاسماً لِـ d_{i+1} من أجل $1 \leq i \leq r-1$.

أ) اثبت أنه مهما كان الشكل الخطي f على M ، فإن المجموعة $f(M') \subset K$ مثالي في K .

ب) اثبت أنه يوجد شكل خطي f_1 على M بحيث تتحقق العلاقة التالية مهما كان الشكل الخطي f على M :

$$f_1(M') \subset f(M') \Rightarrow f_1(M') = f(M')$$

اثبت أن لدينا عندئذ :

$$f_1(M) = K$$

ج) نختار f_1 محققاً لِـ ب) ؛ ونضع :

$$f_1(M') = (d_1)$$

ثم نختار شعاعاً u_1 في M' بحيث :

$$f_1(u_1) = d_1$$

اثبت أن لدينا :

$$f(u_1) \in (d_1)$$

مهما كان الشكل الخطي f على M (بوضع $f(u_1) = d$ ، اثبت أنه توجد عبارة خطية g لِـ f وَ f_1 بحيث يصبح $g(u_1)$ مساوياً لأكبر قاسم مشترك لِـ d وَ d_1) .

د) استنتج من ج) أن لدينا :

$$u_1 = d_1 \ e_1$$

من أجل شعاع e_1 في M بحيث $f_1(e_1) = 1$.

ر) اثبت أن M يساوي المجموع المباشر للمقياس الجزئي المولد عن e_1 ولِـ $\mathrm{Ker}(f_1)$ ؛ وأن M' يساوي المجموع المباشر للمقياس الجزئي المولد عن u_1 ولِـ $M' \cap \mathrm{Ker}(f_1)$.

بين أن $f(M') \subset f_1(M')$ من أجل كل f .

س) أتمم البرهان بالتدريج على n .

م م 9. لتكن A مصفوفة من n سطر و p عمود ، معاملاتها في حلقة رئيسية K . اثبت ، مستعيناً بالتمرين 8 ، أنه توجد مصفوفتان :

$$U \in GL(n, K) \ ; \ V \in GL(p, K)$$

بحيث :

$$U\,A\,V = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & d_2 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots d_r & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

حيث ترمز $d_1, \ldots, d_r$ لعناصر غير منعدمة في K بحيث يقسم كل واحد منها العنصر الذي يليه (من اليسار إلى اليمين) . تسمى العناصر $d_1, \ldots, d_r$ **العوامل اللامتغيرة** للمصفوفة A ؛ سنرى (التمرين 11) أن المثاليات :

$(d_1), \ldots, (d_r)$ معينة تماماً بـ A .

م م **10**. اثبت أن كل زمرة تبديلية من صنف منته ، متشاكلة حتماً مع المجموع المباشر لزمرة $\mathbf{Z}^p$ ولزمر دورية منتهية $\mathbf{Z}/d_1\mathbf{Z}, \ldots, \mathbf{Z}/d_r\mathbf{Z}$. (لاحظ أن مقياساً على K ، من صنف منته حيث K حلقة كيفية ، متشاكل مع مقياس M/M' حيث M حر ومن صنف منته - ثم طبق التمرين 8) . كيف يمكن تعميم هذه النتيجة لتشمل حالة حلقة رئيسية كيفية؟

م م **11**. نحتفظ بفروض ورموز التمرين 8 ، ونستعمل نتائجه .

أ) لتكن $j_1, \ldots, j_h$ صحيحات بحيث :

$$1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_h \leq r$$

اثبت أن $d_1 \ldots d_h$ تقسم $d_{j_1} \ldots d_{j_h}$.

ب) ليكن h بحيث $1 \leq h \leq r$ ؛ اثبت أنه إذا كان f شكلاً h الخطية متناوباً على M ، فإن الجداء $d_1 \ldots d_h$ يقسم $f(x_1, \ldots, x_h)$ مهما

كان $x_1, \ldots, x_h$ في M' ، بيّن أننا نستطيع إختيار f و $x_h, \ldots, x_1$ في M' بحيث :

$$d_1 \ldots d_h = f(x_1, \ldots, x_h)$$

استنتج أن $d_1 \ldots d_h$ من أكبر القواسم المشتركة لعناصر K من الشكل $f(x_1, \ldots, x_h)$ ، واستخلص من ذلك أن المتتاليات (d_i) معينة تماماً بالمقياس M والمقياس الجزئي M' (أي أنها لاتتعلق بإختيار الأسس التي أنشئت في التمرين 8 .)

جـ) ليكن $(a_i)_{1 \le i \le n}$ أساساً كيفياً لـ M و $(b_j)_{1 \le j \le p}$ جملة كيفية من مولدات M' ؛ نرمز بـ A للمصفوفة (من n سطر و p عمود) المشكلة من إحداثيات العناصر b_j بالنسبة للأساس (a_i) لـ M .

اثبت من أجل $1 \le h \le r$ ، أن العنصر $d_1 \ldots d_h$ واحد من أكبر القواسم المشتركة للأصغريات من الرتبة h للمصفوفة A .

د) استنتج أننا نستطيع حساب العوامل $d_1 \ldots d_r$ الموجودة في التمرين 9 ، بنفس الطريقة .

ر) لتكن A وَ B مصفوفتين ، عدد سطورها n وعددها p ، ومعاملاتها في حلقة رئيسية K . لكي يكون A و B متكافئتين (أي لكي توجد مصفوفتان U وَ V يقبلان القلب بحيث : $B = UAV$) يلزم ويكفي أن يكون لـ A وَ B نفس المرتبة ونفس العوامل اللامتغيرة .

ملحوظة – نعبّر في معظم الأحيان عن هذه النتيجة بإدخال ، مكان العوامل اللامتغيرة لـ A ، **القواسم الأولية** لهذه العوامل :

$$e_1 = d_1, e_2 = d_2/d_1, \ldots, e_r = d_r/d_{r-1}$$

م م **12.** لتكن K حلقة رئيسية وَ :

$$a_j = (a_{1j}, \ldots, a_{nj}) \qquad (1 \le j \le p)$$

عناصر من K^n . لكي تكون هذه العناصر جزء من أساس لـ K^n يلزم ويكفي أن تكون الأصغريات من الرتبة p للمصفوفة :

$$\begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1p} \\ \dots \\ a_{n1} \dots a_{np} \end{pmatrix}$$

المشكلة من مركبات الأشعة المعطاة، أولية فيما بينها (وبصفة خاصة، غير منعدمة كلها).

م م 13. لتكن K حلقة رئيسية و n و p صحيحين بحيث $1 \leq p \leq n$. ولتكن A مصفوفة عدد سطورها n وأعمدتها p، معاملاتها في K. لكي نستطيع إتمام A لتصبح مصفوفة مربعة رتبتها n، قابلة للقلب على الحلقة K، يلزم ويكفي أن يكون أكبر قاسم مشترك للأصغريات من الرتبة p لـ A، مساوياً لـ 1.

14. أوجد كل المصفوفات ذات المعاملات الصحيحة الناطقة، التي تكتب على الشكل:

$$\begin{pmatrix} 1 & 4 & * \\ 2 & 5 & * \\ 1 & 6 & * \end{pmatrix}$$

ومعينها يساوي 1.

م 15. لتكن A مصفوفة معاملاتها في حلقة تبديلية K؛ نقول عن عملية إنها عملية أولية على A إذا إنحصرت في تبديل لسطرين (عمودين بالترتيب) من A، أو في إضافة لسطر (عمود، بالترتيب) عبارة خطية للسطور (الأعمدة بالترتيب) الأخرى، أو في ضرب سطر (عمود بالترتيب) بعنصر قابل للقلب من K.

أ) اثبت أن كل مصفوفة مستخرجة من A بواسطة عمليات أولية متوالية، تكافئ حتماً A (أي أنها من الشكل UAV حيث U وَ V يقبلان القلب على K).

ب) نضع $K = Z$ وَ $A \neq 0$. وليكن d_1 أصغر صحيح موجب تماماً يقبل الخاصية التالية: توجد مصفوفة تستخرج من A بواسطة عمليات أولية متوالية، مع العلم أن d_1 عنصر من معاملاتها. اثبت أنه توجد عندئذ مصفوفة من الشكل:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

(حيث A_1 مصفوفة لها سطر وعمود أقل من A) نستخرج من A بواسطة عمليات أولية متوالية ، وأن كل معاملات A_1 من مضاعفات d_1 .

جـ) استنتج من ذلك ، من أجل $Z = K$ ، برهانا جديداً لنتيجة التمرين 9 (وبالتالي لنتيجة التمرين 8 ، أيضاً) ، وطريقة فعلية لإرجاع مصفوفة معاملاتها في Z إلى الشكل القانوني الوارد في التمرين 9 .

د) طبق هذه النتيجة على المصفوفات الموالية :

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 & -1 \\ 6 & 12 & 14 & 5 \\ 0 & 4 & 14 & -1 \\ 10 & 6 & -4 & 11 \end{pmatrix} , \quad \begin{pmatrix} 0 & 6 & -9 & -3 \\ 12 & 24 & 9 & 9 \\ 30 & 42 & 45 & 27 \\ 66 & 78 & 81 & 63 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 17 & -28 & 45 & 11 & 39 \\ 24 & -37 & 61 & 13 & 50 \\ 25 & -7 & 32 & -18 & -11 \\ 31 & 12 & 19 & -43 & -55 \\ 42 & 13 & 29 & -55 & -68 \end{pmatrix}$$

16. لتكن A مصفوفة ، معاملاتها في حلقة تبديلية K كيفية ، ولتكن B مصفوفة مكافئة لـ A (أي من الشكل UAV حيث U و V يقبلان القلب في الحلقة K) . اثبت ، من أجل كل عدد صحيح أقل من عدد سطور ومن عدد أعمدة A ، أن مثالي K المولد عن الأصغريات من الرتبة p لـ A يساوي المثالي المولد عن الأصغريات من الرتبة p لـ B .

م **17.** لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة n ، معاملاتها في حلقة رئيسية K . أثبت أنه توجد مصفوفة U في $GL(n, K)$ بحيث تكون AU مثلثية (استعمل التمرينين 1 و 4 ، واستدلل بالتدرج على n) . التفسير الهندسي ؟

م **18.** نعتبر جملة من المعادلات الخطية :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}$$

معاملاتها وأطرافها الثانية ومجاهيلها في حلقة رئيسية K. أثبت أنه لكي تقبل هذه الجملة حلاً على الأقل، يلزم ويكفي أولاً أن تكون المصفوفتان :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1p} \\ \\ a_{n1} \dots a_{np} \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} \dots a_{1p} & b_1 \\ \dots\dots\dots & \\ a_{n1} \dots a_{np} & b_n \end{pmatrix}$$

من نفس المرتبة r، ثانياً أن يكون أحد أكبر القواسم المشتركة للأصغريات من الرتبة r لـ A مساوياً لأحد القواسم المشتركة للأصغريات من الرتبة r لـ B.

م م 19. لتكن K حلقة رئيسية، وَ f شكلا p الخطية على المقياس K^n وليكن d أحد أكبر القواسم المشتركة لمعاملات f بالنسبة للأساس القانوني؛ أثبت أنه توجد عناصر $x_1, \dots, x_p$ من K^n بحيث :

$$f(x_1, \dots, x_p) = d$$

20. أثبت أن كل عدد ناطق يكتب، بطريقة وحيدة، على شكل مجموع منته لكسور من الشكل.

$$a/p^n$$

حيث p أولي أكبر من 1 أو يساويه وَ $1 \le a \le p-1$. المطلوب القيام بهذا التفكيك للعددين :

$$\frac{1887}{5400} \;,\; \frac{122}{1323}$$

م م 21. لتكن K حلقة تامة تبديلية. نقول عن عنصر p من K إنه غير قابل للإختزال إذا كان غير قابل للقلب، وكان لا يقبل قواسم أخرى غير البديهية (وهي عناصر K القابلة للقلب والعناصر up حيث u عنصر من K يقبل القلب).

نقول عن K إنها عاملية إذا تمتعت بالخاصيتين التاليتين :

(ع1) كل عنصر غير قابل القلب من K ، يساوي جداء عدد منته من العناصر غير القابلة للإختزال.

(ع2) إذا كان $p_1 \ldots p_r = q_1 \ldots q_s$ ، حيث ترمز العناصر p_i و q_j لعناصر غير قابلة للإختزال في K ، فإن $r = s$ ، ونستطيع تغيير رتبة العناصر q_j بحيث يصبح لدينا :

$$Kp_i = Kq_i \qquad 1 \leq i \leq r$$

(أو ، $q_i = u_i p_i$ حيث u_i يقبل القلب ، وهذا يكافئ ما سبق)

تعبّر هذه الخاصيات على أن كل عنصر من K يكتب ، بطريقة - أساسياً - وحيدة ، على شكل جداء عناصر غير قابلة للإختزال من K .

أ) أثبت أن كل حلقة رئيسية ، عاملية حتماً (العكس غير صحيح ؛ راجع التمرين 31 ، ف 32) .

ب) أثبت أننا نستطيع تعويض الشرط (ع2) في تعريف حلقة عاملية بـ :

(ع3) إذا كان عنصر p غير قابل للإختزال من K ، يقسم جداء xy ، فإنه يقسم على الأقل عاملاً من عاملي الجداء.

ج) أثبت أننا نستطيع أيضاً تعويض (ع2) بـ :

(ع4) من أجل كل عنصر غير قابل للإختزال p ، من K ، فإن المثالي K_p أولي .

د) لتكن K حلقة عاملية . أثبت أنه مهما كان x ، y في K فإنه يوجد عنصر d من K بحيث تكون القواسم المشتركة لـ x و y هي بالضبط قواسم d (نقول عندئذ أن d واحد من أكبر القواسم المشتركة لِـ x وَ y) وبيّن أن d وحيد إذا ما أهملنا إمكانية ضربه في عنصر قابل للقلب من K .

ر) لتكن K حلقة عاملية و L حقل كسورها و p المثالي الأولي لـ K المولد عن عنصر غير قابل للإختزال p ينتمي إلى K . أثبت أن الحلقة المحلية K_p [التمرين 7، ص)، ف 8] حلقة تقييم منفصلة (التمرين 6، ف 8) لـ L .

س) إذا كانت حلقة تبديلية حلقة عاملية ومن نوع ديدكند فإنها رئيسية .

ص) لتكن K حلقة تامة تبديلية نوثرية . أثبت أن كل عنصر غير قابل للقلب في K يساوي جداء عناصر غير قابلة للإختزال - أي أن K يحقق (ع1) . [لكن الحلقات النوثرية ليست حتماً عاملية ، أي أن التفكيك إلى عناصر غير قابلة للإختزال ليس دوماً وحيداً : خذ مثلاً حلقة من نوع ديدكند غير رئيسية ؛ تحدث الظاهرة الأخيرة خاصة لحلقة صحيحات حقل أعداد جبرية ؛ وقد عرقلت هذه الظاهرة لمدة طويلة تقدم دراسة هذه الحلقات - إلى أن جاء ديدكند واكتشف أن المفهوم الهام ، في هذه الحالة ، ليس مفهوم العنصر غير القابل للإختزال ، وإنما هو مفهوم المثالي الأولي ، وذلك خلافاً لما توحيه أوجه الشبه المضللة ، مع الأعداد الصحيحة الناطقة] .

1. أوجد حاصل القسمة وباقيها في الحالات التالية :

$2X^4 - 3X^3 + 4X^2 - 5X + 6$ على $X^2 - 3X + 1$

$4X^3 + X^2$ على $X + 1 + i$

$X^4 - 2X^3 + 4X^2 - 6X + 8$ على $X - 1$

2. احسب أكبر قاسم مشترك لكثيرات الحدود التالية :

أ) $X^6 - 7X^4 + 8X^3 - 7X + 7$ و $3X^5 - 7X^3 + 3X^2 - 7$

ب) $X^5 + X^4 - X^3 - 3X^2 - 3X - 1$ و $X^4 - 2X^3 - X^2 - 2X - 1$

جـ) $X^6 - X^5 - X^4 - 2X^3 - X^2 + X + 1$ و $X^5 + X^3 - X^2 - 1$
وَ $X^4 - 2X^3 - X + 2$.

3. من أجل كل ثنائية p, q المؤلفة من كثيري حدود، أوجد كثيري حدود u و v بحيث يكون $up + vq$ واحداً من أكبر القواسم المشتركة لـ p و q :

أ) $p = X^5 + 3X^4 + X^3 + X^2 + 3X + 1$ و $q = X^4 + 2X^3 + X + 2$

ب) $p = 3X^5 + 5X^4 - 16X^3 - 6X^2 - 5X - 6$
وَ $q = 3X^4 - 4X^3 - X^2 - X - 6$

جـ) $p = X^5 + 5X^4 + 9X^3 + 7X^2 + 5X + 3$
وَ $q = X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X + 1$

د) $p = X^4$ وَ $q = (1 - X)^4$

4. أوجد كثير حدود تكون درجته أقل درجة ممكنة ويكون باقي قسمته على $X^4 - 2X^3 - 2X^2 + 10X - 7$ يساوي $X^2 + X + 1$ ، ويكون باقي قسمته على $X^4 - 2X^3 - 3X^2 + 13X - 10$ يساوي $2X^2 - 3$.

م5. اثبت أن أكبر قاسم مشترك لكثيري الحدود

$$X^m - 1, X^n - 1$$

هو $X^d - 1$ ، حيث يُمثل d أكبر قاسم مشترك للصحيحين m و n .

6. ليكن p و q كثيري حدود لمتغير واحد إذا كان كثير الحدود $p(X^3) + Xq(X^3)$ يقبل القسمة على $X^2 + X + 1$ فإن $p(1) = q(1) = 0$.

7. ليكن :

$$f(X) = \frac{p(X)}{q(X)}$$

كسراً ناطقاً لمُتغير واحد، معاملاته في حقل K ، وليكن a جذراً بسيطاً لمقامه q ، بحيث تكون مساهمة القطب a في تحليل f إلى عناصر بسيطة، هي :

$$\frac{A}{X - a}$$

من أجل عنصر A من K . اثبت أن :

$$A = \frac{p(a)}{q'(a)}$$

[أكتب :

$$\frac{p(X)}{q(X)} = \frac{A}{X - a} + \frac{r(X)}{s(X)}$$

حيث $r(a) \neq 0$ و $s(a) \neq 0$ ، وحد المقامات، واشتق ثم خذ $X = a$ في النتيجة التي تحصل عليها. إن كيفية «الإنتقال إلى النهاية» التي نستعملها عموماً في دروس التحليل لاثبات مثل هذه النتيجة، لا تعمم إلى كل الحقول] .

8. حلل إلى عناصر بسيطة (على **C** ، ثم على **R**) الكسور الناطقة التالية :

$$\frac{X^2+1}{X(X^2-1)},\quad \frac{2}{(X-1)(X-2)(X-3)},\quad \frac{X^5-X^3-X^2}{X^2-1}$$

$$\frac{4X^3}{(X^2+1)^2},\quad \frac{X^4-X^2+1}{(X-1)^3},\quad \frac{3X^2+3}{X^3-3X-2},\quad \frac{X^5}{(X^4-1)^2}$$

على القارئ الذي يعتقد بأن هذه الأمثلة غير كافية ، أن يقوم بنفسه بإنشاء ما شاء من الأمثلة الأخرى ؛ الطريقة هي اختيار كثيري حدود كيفيين (على أن تكون جذور المقام بديهية ، أو بالأحرى قائمة لحساب ، وذلك بهدف الحصول على نتائج ضمنية) .

م 9. ليكن L حقلاً تبديلياً و K حقلاً جزئياً من L ، و x عنصراً من L جبرياً على K . لتكن I مجموعة كثيرات الحدود f من $K[X]$ بحيث $f(x) = 0$ ؛ أثبت أن I مثالي لـ $K[X]$. استنتج وجود كثير حدود وحيد

$$f(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_n \qquad (*)$$

معاملاته في K ويُحقق $f(x) = 0$ ، وبحيث يكون كل كثير حدود g من $K[X]$ ، حيث $g(x) = 0$ ، مضاعفاً لـ f

أثبت أن :

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0 = 0 \qquad (**)$$

هي المعادلة (ذات المعاملات في K) التي لها أصغر درجة ممكنة من بين المعادلات التي يُحققها x . نقول عن (*) إنه كثير الحدود الأصغري ، وعن (**) إنها المعادلة الأصغرية لـ x على K ؛ ونسمي درجتها n درجة x على K . أثبت أن بعد الحقل الجزئي $K[x]$ ، باعتباره فضاءً شعاعياً على K ، يساوي n وأن لهذا الحقل أساساً مؤلفاً من العناصر :

$$1, x, \dots, x^{n-1}$$

أي أن لدينا :

$$[K[x] : K] = n$$

باعتبار رموز التمرين 5 من ف 26 .

نأخذ $L = \mathbf{C}$ وَ $K = \mathbf{Q}$ فيما سبق. أوجد المعادلات الأصغرية للعنصرين التاليين من L :

$$\sqrt{2} + \sqrt{3} \ ; \ \sqrt[3]{2} + \sqrt{5}$$

م **10.** ليكن K حقلاً تبديلياً.

أ) ليكن L حقلاً جزئياً من K و x عنصراً من L جبرياً على K. اثبت أن كثير الحدود الأصغري لِـ x على K لا يقبل الإختزال (على K).

ب) ليكن f كثير حدود غير قابل للإختزال، لمتغير واحد، معاملاته في K؛ نفرض أن معامله الأساسي يساوي 1. ليكن x جذراً لِـ f في توسيع لِـ K.

اثبت أن f يساوي كثير الحدود الأصغري لِـ x على K.

ج) نحتفظ بكثير الحدود f كما هو وارد في السؤال السابق؛ ليكن x وَ y جذرين لِـ f في حقل فوقي L لِـ K. اثبت أنه يوجد تشاكل وحيد j من الحقل $K(x)$ على الحقل $K(y)$ بحيث:

$$j(x) = y, \quad j(a) = a \quad \forall\, a \in K$$

د) نفرض، زيادة على ذلك، أن K يساوي حقل كسور حلقة A. نحتفظ برموز السؤال السابق، اثبت أنه إذا كان x صحيحا على A (التمرين 6، ف 26) فالأمر كذلك فيما يخص y.

م م ر) لتكن A حلقة تامة تبديلية، و K حقل كسوره، و L حقلاً فوقياً لِـ K. ليكن x في K، صحيحاً على A؛ اثبت أن مُعاملات كثير الحدود الأصغري f لِـ x على K صحيحات على A (خذ L في حقل مُغلق جبرياً، ولاحظ أن كل جذور f صحيحات على A، ثم طبق ما ورد في الفقرة 6 من ف 33). استنتج أن مُعاملات f تنتمي إلى A عندما تكون A مُغلقة صحيحياً (أي عندما يكون كل عنصر من K صحيح على A، منتمياً إلى A).

س) نفرض فيما سبق أن L توسيع جبري، من درجة منتهية لِـ K (التمرين 4، ف 26) . اثبت أنه إذا كان $x \in L$ صحيحاً على A، وكان A مُغلقاً صحيحياً فإن

$$Tr_{L/K}(x) \in A; \ N_{L/K}(x) \in A$$

(استعمل التمرين 5 من ف 26) .

م م **11.** ليكن L حقلاً تبديلياً، و K حقلاً جزئياً من L، و x عنصراً من L جبرياً على K . نقول عن x إنه **قابل للفصل** على K، إذا كان يُمثل جذراً بسيطاً لـكثير حدود الأصغري f على K.

أ) حتى يكون x قابلاً للفصل على K، يلزم ويكفي أن يكون x جذراً بسيطاً لمعادلة جبرية مُعاملاتها في K، على الأقل.

ب) لدينا $f' = 0$ إذا كان x غير قابل للفصل على K، والعكس بالعكس.

ج) إذا كانت مميزة K تساوي 0، فإن كل عنصر x جبري على K، يقبل الفصل على K، كما أن كل جذور كثير حدود غير قابل للإختزال، مُعاملاته في K، جذور بسيطة.

د) إذا كانت مميزة K تُخالف 0 $(p \neq 0)$، فإن مهما كان العنصر x من L، المفروض جبرياً على K، نستطيع إيجاد صحيح $n \geq 0$ بحيث يكون:

$$x^{p^n}$$

قابلاً للفصل على K .

ر) ليكن L توسيعاً جبرياً، درجته منتهية، لِـ K (التمرين 4، ف 26) . لكي يكون L قابلاً للفصل على K (التمرين 4، س) من ف 26) يلزم ويكفي أن يكون كل x من L قابلاً للفصل على K .

م **12.** إذا كان كثير حدود غير ثابت f من $\mathbf{Z}[X]$ لا يقبل الإختزال في الحلقة $\mathbf{Q}[X]$ فإننا نستطيع تحليله، بطريقة غير تافهة، إلى جداء لـكثيرات

حدود معاملاتها صحيحة ناطقة (استعمل توطئة غوس، التمرين 13، ف 27).

13. من بين كثيرات الحدود:

$$X^2 + X + 1, X^4 + X + 1, X^4 + X^2 + 1, \quad X^3 + 7X + 7, X^5 + 3X + 2$$

عيّن تلك التي لا تقبل الإختزال على **Q**.

م **14.** ليكن $f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n$ كثير حدود، معاملاته في **Z**. نفرض أنه يوجد عدد أولي p يقسم $a_0, \dots, a_{n-1}$ ولا يقسم a_n، وأن a_0 لا يقبل القسمة على p^2. اثبت أن f لا يقبل الإختزال على **Q** **(قاعدة ايزنشتين لعدم قابلية الإختزال**؛ استعمل التمرين 12).

م **15.** (القواسم الأولية لمصفوفة ذات معاملات من شكل كثيرات حدود). ليكن k حقلاً تبديلياً وَ $K = k[X]$ حلقة كثيرات الحدود من مُتغير واحد، التي معاملاتها في k.

أ) اثبت أن $GL(n, K)$ هي مجموعة المصفوفات U من $M_n(K)$ التي لها معين يساوي عنصراً غير مُنعدم من الحقل k (إذن فمعين مصفوفة من هذا النوع «ثابت»).

ب) نستعمل فيما يلي، بخصوص المصفوفات التي تنتمي معاملاتها إلى K، مفهوم العملية الأولية الواردة في التمرين 15 من ف 31. لتكن A مصفوفة مستطيلة غير منعدمة، معاملاتها في K، وليكن $a_{ij}(X)$ المعامل الواقع عند تقاطع العمود i والسطر j في A، اثبت أننا نستطيع، بواسطة عدد منته من العمليات الأولية، تعويض المعاملات الواقعة على العمود i والسطر j في A، ببواقي قسمتها على $a_{ij}(X)$.

ج) ليكن $d_1(X)$ كثير حدود غير منعدم، معامله الأساسي يساوي 1، ودرجته أقل درجة ممكنة من بين كل المعاملات غير المنعدمة للمصفوفات المستخرجة من A بواسطة عمليات أولية متوالية. اثبت أننا نستطيع أن نستخرج من A، بواسطة عمليات أولية متوالية، مصفوفة من الشكل:

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

حيث A_1 مصفوفة تقل بسطر وعمود عن المصفوفة A ، أما معاملاتها فهي كثيرات حدود تقبل القسمة على d_1 .

اثبت أن d_1 واحد من أكبر القواسم المشتركة لمعاملات A غير المنعدمة (وبالتالي فهو معين تماماً بتعيين A) .

د) اثبت أننا نستطيع أن نستخرج من A ، بواسطة عمليات أولية متوالية ، مصفوفة من الشكل :

$$\begin{pmatrix} d_1(X) & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ 0 & d_2(X) & \ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & d_r(X) & 0 \ldots 0 \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \ldots 0 \end{pmatrix}$$

حيث ترمز العناصر d_i لـكثيرات حدود غير منعدمة بحيث يكون كل واحد منها قاسماً للذي يليه . بيّن ، مستعيناً بالتمرين 16 ، ف 31 ، أن من أجل كل صحيح i أصغر من عدد سطور وعدد أعمدة A ، يكون كثير الحدود $d_1(X) \ldots d_i(X)$ (حيث نضع $d_i = 0$ من أجل $r + 1 \leq i$) واحداً من أكبر القواسم المشتركة للأصغريات من الرتبة i لـ A . استنتج أن الصحيح r يساوي مرتبة A ، وأن من أجل $1 \leq i \leq r$ تكون كثيرات الحدود $d_i(X)$ معينة تماماً بـ A عندما نفرض على معاملاتها الأساسية بأن تكون مساوية لـ 1 .

ر) تُسمى العناصر $d_1, \ldots, d_r$ **العوامل اللامتغيرة** للمصفوفة A ، أما **القواسم الأولية** لـ A فهي ، تعريفاً ، النسب $\frac{d_i(X)}{d_{i+1}(X)}$. أخيراً نقول عن مصفوفتين A وَ B ، معاملاتها في $K = k[X]$ ، ولهما نفس عدد السطور : p ونفس عدد الأعمدة : q ، انهما **متكافئتان** إذا وجدت مصفوفتان : $U \in GL(p, K)$ وَ $V \in GL(q, K)$ بحيث $B = U A V$.

اثبت أنه لكي تكون A و B متكافئتين يلزم ويكفي أن تكون لهما نفس المرتبة، ونفس العوامل اللامتغيرة، وأن نستطيع الإنتقال من A إلى B بواسطة عمليات أولية متوالية.

م م س) ليكن M مقياساً على K، متشاكلاً مع K^p، و M' مقياساً جزئياً لـ M. اثبت أنه يوجد أساس $(a_1, \dots, a_p)$ لـ M، وكثيرات حدود $d_1, \dots, d_p$ في K بحيث يكون d_i قاسماً لـ d_{i+1}، ويكون M' مولداً عن $d_1 a_1, \dots, d_p a_p$ (لا يمنع أن تكون بعض العناصر d_i منعدمة). [طبّق السؤال د) على مصفوفة، بالنسبة لأساس لـ M، تماثل داخلي لـ M يقبل M' كصورة له].

م م ص) ليكن E مقياساً على K من صنف منته (لكنه ليس حراً بالضرورة). اثبت أن E متشاكل مع الجداء المباشر لمقياس من الشكل K^s ولمقاييس من الشكل $K/d_1K, \dots, K/d_rK$ حيث ترمز $d_1, \dots, d_r$ لكثيرات حدود غير مُنعدمة بحيث يكون d_i قاسماً لـ d_{i+1} من أجل $1 \leq i \leq r-1$. [اختر تماثلاً f من K^p على E، وطبق السؤال السابق على $\mathrm{Ker}(f)$]. اثبت أن الصحيحين r و s وكثيرات الحدود d_i (التي نفرض بأن لها معاملاً أساسياً يساوي 1)، معينة تماماً بواسطة E وبالشروط المفروضة عليها. [نقول عن $d_1, \dots, d_r$ إنها **العوامل اللامتغيرة** للمقياس E على K؛ نُلاحظ أن الصحيح s هو مرتبة E بالمعنى الوارد في التمرين 11، ر)، ف 29]. اثبت أن مقياسين على K، من صنف منته، يكونان متشاكلين إذا وفقط إذا كانت مرتبتاهما وعواملهما اللامتغيرة متساوية.

م م ط) استنتج النتائج السابقة من التمارين 8، 9، 10، 11 ومن كون K حلقة رئيسية.

[نُشير إلى أن لنتائج هذا التمرين، التي تعتبر بمثابة ما يقابل، بخصوص حلقات كثيرات الحدود من متغير واحد على حقل، نظرية القواسم الأولية للمصفوفات التي تنتمي معاملاتها إلى $\mathbf{Z}$ (التمرين 17، ف 31)، لها العديد من التطبيقات الهامة، خاصة في نظرية جمل المعادلات

التفاضلية الخطية من رتبة كيفية، ذات معاملات ثابتة، نلاحظ أنه بالامكان إيجاد عروض جيدة لهذه النتائج ضمن بعض المؤلفات الواردة في قائمة المراجع (خاصة، في البير، غلعسد، شراير – ستارس)، إلا أن التفسير الحقيقي لهذه النتائج هو طبيعة الحال، نظرية المقاييس من الصنف المنتهي على حلقة رئيسية.]

نطلب في التمارين الموالية(*) من 16 إلى 21، أن نبسط المصفوفة المعطاة إلى أن تصبح على الشكل القانوني الوارد في التمرين 15، د)، نطلب حساب القواسم الأولية (مع العلم أن حقل الأساس هو C)

.16 $\begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & X \end{pmatrix}$ **.17** $\begin{pmatrix} X^2-1 & X+1 \\ X+1 & X^2+2X+1 \end{pmatrix}$

.18 $\begin{pmatrix} 1-X & X^2 & X \\ X & X & -X \\ 1+X^2 & X^2 & -X^2 \end{pmatrix}$، **.19** $\begin{pmatrix} X & 1 & 0 & 0 \\ 0 & X & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X & 1 \\ 0 & 0 & 0 & X \end{pmatrix}$

.20 $\begin{pmatrix} X & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & X & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & X & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & X & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5+X \end{pmatrix}$، **.21** $\begin{pmatrix} X & 1 & 1 \dots 1 \\ 0 & X & 1 \dots 1 \\ 0 & 0 & X \dots 1 \\ \dots & & \\ 0 & 0 & 0 \dots X \end{pmatrix}$

(عدد السطور، في التمرين 21، يساوي عدد الأعمدة يساوي n)

نطلب في التمرينين المواليين، إيجاد مصفوفتين U و V، معاملاتها كثيرات حدود، ومعيناهما ثابتان وغير منعدمين، بحيث نكتب UAV على الشكل القانوني الوارد في التمرين 15، مع العلم أن A هي المصفوفة المعطاة:

(*) أخذت هذه التمارين (من 16 إلى 21) من مؤلف بروسكور جاكوف ويمكن للقارئ أن يجد فيه العديد من التمارين المماثلة الأخرى.

$$\begin{pmatrix} X^4 + 4X^3 + 4X^2 + X + 2, & X^3 + 4X^2 + 4X \\ X^4 + 5X^3 + X^2 + 5X + 2, & X^3 + 5X^2 + 8X + 4 \end{pmatrix}$$ .22

.23

$$\begin{matrix} X^4 + 3X^3 - 5X^2 + X + 1, & 2X^4 + 3X^3 - 5X^2 + X - 1, & 2X^4 + 2X^3 - 4X^2 \\ X^4 - X^3 + 1, & 2X^4 - X^3 - X^2, & 2X^4 - 2X^3 \\ X^4 + 2X^3 - 4X^2 + X + 1, & 2X^4 + 2X^3 - 4X^2 + X - 1, & 2X^4 + X^3 - 3X^2 \end{matrix}$$

24. اثبت أن المصفوفتين التاليتين، اللتين لها معاملات تنتمي إلى $C[X]$، متكافئتان:

$$A = \begin{pmatrix} X^3 + 6X^2 + 6X + 5, & X^3 + 4X^2 + 4X + 3 \\ X^3 + 3X^2 + 3X + 2, & X^3 + 2X^2 + 2X + 1 \\ 2X^3 + 3X^2 + 3X + 1, & 2X^3 + 2X^2 + 2X \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} X^3 + X^2 + X & 2X^3 + X^2 + X - 1 \\ 3X^3 + 2X^2 + 2X - 1 & 6X^3 + 2X^2 + 2X - 1 \\ X^3 - X^2 - X - 1 & 2X^3 - X^2 - X - 3 \end{pmatrix}$$

(للبرهان على ذلك، نحسب مصفوفتين U و V بحيث $B = UAV$).

25. احسب العوامل اللامتغيرة للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} X^3 + X^2 - X + 3, & X^3 - X^2 + X, \\ 2X^3 + X^2 - X + 4, & X^3 + X^2 - X + 2 \\ \\ X^3 + 3X^2 - 3X + 6, & X^3 - 3X^2 + 3X - 2, \\ 2X^3 + 3X^2 - 3X + 7, & X^3 + 3X^2 - 3X + 4 \\ \\ X^3 + 2X^2 - 2X + 4, & X^3 - 2X^2 + 2X - 1, \\ 2X^3 + 2X^2 - 2X + 5, & X^3 + 2X^2 - 2X + 3 \\ \\ 2X^3 + X^2 - X + 5, & 2X^3 - X^2 + X + 1, \\ 4X^3 + X^2 - X + 7, & 2X^3 + X^2 - X + 3 \end{pmatrix}$$

26. احسب القواسم الأولية المصفوفة :

$X^4 + 1, \; X^5 - X^4 + X^3 - 1,$
$X^4 - 4X^3 + 4X - 5$

$2X^4 + 3, \; 2X^5 - 2X^4 + 4X^3 - 2,$
$3X^4 - 10X^3 + X^2 + 10X - 14$

$X^4 + 2, \; X^5 - X^4 + 2X^3 - 2,$
$2X^4 - 6X^3 + X^2 + 6X - 9$

نأخذ $\mathbb{Q}[X]$ أو $\mathbb{R}[X]$ أو $\mathbb{C}[X]$ كحلقة أساس

م 27. نريد البرهان على أنه إذا كانت K حلقة تبديلية نوثرية، فإن حلقة كثيرات الحدود $K[X]$ نوثرية. نرمز بـ I لمثالي لـ $K[X]$.

أ) مهما كان الصحيح $n \geq 0$، نرمز بـ J_n للمجموعة الجزئية من K المؤلفة من 0 ومن العناصر a التي تحقق الشرط التالي:

يوجد كثير حدود f في I، درجته n، ومعامله الأسمى يساوي a . أثبت أن المجموعات J_n تشكل متتالية متزايدة من مثاليات لـ K . استنتج أن

$$J_r = J_{r+1} = \dots$$

من أجل صحيح معين r .

ب) من أجل كل صحيح i بحيث $0 \leq i \leq r$، نختار في I كثيرات حدود f_{ij} $(1 \leq j \leq n_i)$ عددها منته، ودرجتها i، ومعاملاتها الأسمية a_{ij} تولد المثالي J_i . أثبت أنه مهما كان f في I، توجد كثيرات حدود q_{ij} في $K[X]$ بحيث :

$$f = \sum_{\substack{1 \leq j \leq n_i \\ 0 \leq i \leq r}} q_{ij} f_{ij} + g$$

حيث $d^\circ(g) < d^\circ(f)$.

ج) استنتج، بالتدريج على درجة f، أن كثيرات الحدود f_{ij}، البالغ عددها $n_0 + \dots + n_r$، تولد المثالي I .

د) استنتج من النتيجة السابقة أنه إذا احتوت حلقة تبديلية L على حلقة جزئية نوثرية K وعلى عناصر $X_1, ..., X_n$ ، عددها منته ، بحيث $L = K[X_1, ..., X_n]$ ، فإن L نوثرية . (لاحظ أن L نسبة لحلقة كثيرات حدود ، معاملاتها في K) .

م **28.** ليكن K حقلاً تبديلياً غير منتهي ، نذكر أن جزء V من K^n يكون منوعة جبرية إذا وجد عدد منته من كثيرات الحدود $p_1, ..., p_r$ المنتمية لِـ $K[X_1, ..., X_n]$ بحيث تكون V مجموعة العناصر X من K^n حيث $p_1(x) = ... = p_r(x) = 0$ ؛ كما نقول عن جزء A من K^n إنه مفتوح زاريسكي إذا كانت المجموعة المتممة له $K^n - A$ منوعة جبرية (أنظر التمرين 1 من الفصلين 27 وَ 28) . باستعمال خاصية $K[X_1, ..., X_n]$ المتمثلة في أنها حلقة نوثرية ، برهن على الخاصيتين التاليتين :

أ) تقاطع جماعة (منتهية أو غير منتهية) من المنوعات الجبرية في K^n ، منوعة جبرية في K^n . كل اتحاد (منته أو غير منته) من مفتوحات زاريسكي ، مفتوح زاريسكي .

ب) كل متتالية متناقصة من المنوعات الجبرية في K^n ، ساكنة بالضرورة . كل مُتتالية من مفتوحات زاريسكي ، ساكنة بالضرورة .

بالإضافة إلى ذلك أثبت أن :

ج) اتحاد جماعة منتهية من المنوعات الجبرية في K^n ، منوعة جبرية في K^n .

تقاطع جماعة منتهية من مفتوحات زاريسكي ، مفتوح زاريسكي أيضاً .

د) تقاطع مفتوحين لِزاريسكي غير خاليين ، غير خال أيضاً . إذا كانت U وَ V منوعتين جبريتين في K^n ، بحيث :

$U \neq K^n$ وَ $V \neq K^n$ ، فإن $U \cup V \neq K^n$.

(من المفيد أن ندخل، من أجل كل منوعة جبرية V في K^n، المثالي $I(V) \subset K[X_1, ..., X_n]$ المؤلف من كثيرات الحدود المنعدمة عند كل x في V، وأن نكتب العمليات المطلوبة على المنوعات الجبرية، بإستعمال المثاليات.

م م **29.** لتكن K حلقة تبديلية نوثرية. أثبت أن حلقة السلاسل الشكلية $K[[X]]$ (التمرين 11 في الفصلين 27، 28) نوثرية. (إذا كان I مثالياً معطى من $K[[X]]$، اعتبر من أجل كل $n \geq 0$ المثالي J_n من K، المؤلف من مُعاملات الحد المتعلق بـ X^n في العناصر f المنتمية لـ I والتي لا تحتوي على أي حد درجته أقل من $n - 1$ أو تساويه).

م م م **30.** ليكن V فضاءً شُعاعياً بُعده منته على حقل تبديلي K مميزته 0. ولتكن G زمرة منتهية، رتبتها r، مؤلفة من تشاكلات ذاتية لـ V. نرمز بـ A لحلقة التوابع التي تُكتب على شكل كثيرات حدود على V (التمرين 17 من الفصلين 27، 28 أو الرقم 2 من الفصل 28 في الحالة التي تكون فيها $V = K^n$، وهي الحالة التي نستطيع دوماً الرجوع إليها).

ليكن s عنصراً من G و f تابعاً على V يُكتب على شكل كثير حدود، نعرّف تطبيقاً f_s من V في K بواسطة:

$$f_s(x) = f(s^{-1}(x)) \qquad \forall\, x \in V$$

نقول عن f إنه لا متغير للزمرة G إذا كان $f = f_s$ مهما كان s في G. نرمز بـ $I \subset A$ لمجموعة العناصر اللامتغيرة، وهي حلقة جزئية من A.

أ) أثبت أن لدينا f_s في A من أجل كل f في A وكل s في G؛ وأن I حلقة جزئية من A.

ب) من أجل كل تابع f من A يكتب على شكل كثير حدود، نعرّف التابع التالي:

$$f^* = \frac{1}{r} \sum_{s \in G} f_s$$

اثبت أن f^* لا متغير لِـ G . اثبت أن لدينا العلاقات :

$$(f + g)^* = f^* + g^* \quad \forall f, g \in A$$
$$f^* = f \Leftrightarrow f \in I$$
$$(fg)^* = f^* g \qquad \forall f \in A, g \in I$$

ج) اثبت أنه إذا كان f لا متغيراً لِـ G ، فإن الأمر كذلك فيما يخص المركبات المتجانسة لِـ f (تمرين 17 من الفصلين 27 ، 28) .

د) ليكن J مثالي الحلقة A المولّد عن I . بمراعاة السؤال ج) ، وخاصية A المتمثلة في كونها حلقة نوثرية (التمرين 14 وَ 15) ، اثبت أنه توجد في I كثيرات حدود مُتجانسة :

$$f_1, \ldots, f_p$$

عددها منته ، تولد المثالي J .

نضع فيما يلي $q_i = d°(f_i)$

ر) من أجل كل f ينتمي لِـ I ، مُتجانس ودرجته q ، اثبت أنه توجد عناصر مُتجانسة u_j من A ، درجاتها $q - q_i$ (نأخذ $u_i = 0$ إذا كان $q - q_i < 0$) بحيث $f = \sum f_i u_i$. اثبت أنه بإمكاننا أخذ العناصر u_i في I (أكتب $f = f^*$) .

س) استنتج من ذلك ، بواسطة الإستدلال بالتدريج ، أن كل f من I كثير حدود للعناصر f_i ، مُعاملاته في K ، أي أن لا متغيرات الزمرة G تشكل حلقة مولدة على K عن عدد منته من العناصر (نظرية اللامتغيرات لهيلبرت) .

م م 31. (يعتمد حل هذا التمرين على نتائج التمرين 21 ، ف 31) . نُريد البرهان على أنه إذا كانت A حلقة عاملية ، فإن الحلقة $A[X]$ عاملية .

أ) ليكن f وَ g كثيري حدود من $A[X]$ ، وليكن p عنصراً غير قابل للإختزال من A ، الذي نفرض أنه يقسم كل معاملات fg ؛ اثبت أن p يقسم كل مُعاملات f، أو كل مُعاملات g . (اتبع خطوات برهان التمرين 13 من ف 27) .

ب) نقول عن كثير حدود f من $A[X]$ إنه بدائي إذا كان أكبر قاسم مُشترك لمعاملاته يساوي 1 . اثبت أنه إذا كان f وَ g بدائيين ، فإن الأمر كذلك فيما يخص fg .

ج) من أجل كل f في $A[X]$ غير منعدم ، نرمز بِـ $c(f)$ لواحد من أكبر القواسم المشتركة لمُعاملاته . اثبت أن :

$$c(fg) = c(f)\ c(g)$$

(توطئة غوس فيما يخص الحلقات العاملية) .

د) ليكن K حقل كسور A . اثبت أنه إذا كان f من $A[X]$ لا يقبل الإختزال في $K[X]$ ، فإن f لا يقبل الإختزال أيضاً في $A[X]$.

ر) استنتج من ذلك ومن السؤال أ) أن العناصر غير القابلة للإختزال من الحلقة $A[X]$ هي العناصر غير القابلة للإختزال في الحلقة العاملية A ، وكثيرات الحدود غير الثابتة والبدائية وغير القابلة للإختزال في الحلقة $K[X]$.

س) إستنتج من ذلك ومن نتائج الفقرة 3 ، ف 32 (التي نُطبقها على $K[X]$) أن كل عنصر من $A[X]$ يُكتب ، بطريقة ، أساسياً ، وحيدة على شكل جداء عناصر غير قابلة للإختزال من $A[X]$ ، وبالتالي ان $A[X]$ عاملي كما أشرنا .

ص) اثبت أنه إذا كانت A حلقة عاملية (إذا كانت A حقلاً أو $A = \mathbf{Z}$ مثلاً) فإن الحلقة $A[X_1, ..., X_n]$ عاملية . بصفة خاصة ، فإن كل كثير حدود (لِـ n متغيراً) ، معاملاته في حقل K ، يُحلل ، بطريقة أساسياً وحيدة ، إلى جداء كثيرات حدود غير قابلة

للإختزال. مُعاملاتها في K (نقول عن كثير حدود f مُعاملاته في K، إنه غير قابل للاختزال إذا كان غير ثابت وكانت كل قواسمه ثابتة أو متناسبة مع f).

ط) اثبت أن الحلقة $Z[X]$ (العاملية إستناداً لما سبق) غير رئيسية (ادرس المثالي المولد عن 2 وَ X). نفس السؤال فيما يخص $K[X, Y]$ حيث K حقل.

ع) اثبت أنه مهما كان الحقل التبديلي K، فإن كثير الحدود $Y^2 - X^3$ لا يقبل الإختزال في الحلقة $K[X, Y]$. (نكتب $K[X, Y] = A[Y]$ حيث $A = K[X]$ ثم نستعمل السؤال د) أعلاه).

ف) اثبت أن كل كسر ناطق f لِـ n متغيراً، معاملاته في حقل K، يُكتب حتماً على الشكل $f = p/q$ حيث يرمز p وَ q لِـكثيري حدود لِـ n متغيراً، معاملاتها في K، وأوليين فيما بينهما (أي أن ليس لهما أي قاسم مُشترك عدا الثوابت)؛ بين كذلك أن p وَ q وحيدان إذا ما أهملنا العوامل الثابتة فيهما. اثبت أن نقاط عدم تعيين f هي عناصر K^n حيث ينعدم p وَ q في آن واحد، وأن أقطاب f هي العناصر x من K^n بحيث $p(x) \neq 0$ وَ $q(x) = 0$.

ق) ليكن p وَ q كثيري حدود غير ثابتين لِـ n متغيراً $(n \geq 2)$ مُعاملاتهما في حقل تبديلي K. نفرض أن p وَ q أوليان فيما بينهما؛ هل نستطيع إستنتاج وجود كثيري حدود u وَ v لِـ n متغيراً، مُعاملاتهما في K، بحيث:

$$up + vq = 1$$

[التفسير الهندسي لخاصية $C[X_1, \ldots, X_n]$ المتمثلة في كونها حلقة عاملية هو التالي: ليكن f عنصراً من $C[X_1, \ldots, X_n]$ غير ثابت، وليكن V السطح المصعد لِـ C^n المعرّف بالمعادلة $f(x) = 0$. لتكن:

$$f(X) = \prod_{i=1}^{i=r} p_i(X)^{\gamma_i}$$

تحليل f إلى جداء عوامل غير قابلة للإختزال. وليكن V_i السطح

المصعد $p_i(x) = 0$. عندئذ يكون V_i غير قابل للاختزال (أي أننا لا نستطيع تمثيل V_i ، بطريقة غير تافهة، على شكل اتحاد منوعتين جبريتين أخريين) ، لدينا :

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_s$$

إن هذا التحليل لـ V وفق سطوح مصعدة غير قابلة للاختزال تحليل وحيد إذا ما أهملنا الترتيب .

بإمكاننا أيضاً النظر إلى هذه المسألة من الزاوية التالية : لتكن V منوعة جبرية في C^n وليكن A مثالي $C[X_1, \dots, X_n]$ مؤلف من كثيرات الحدود f بحيث $f(x) = 0$ مهما كان x في V . لما كانت $C[X_1, \dots, X_n]$ نوثرية ، فإن التمرين 9 ، ب) من الفصل 18 يعني أن A يساوي تقاطعاً منتهياً لمثاليات ابتدائية لـ $C[X_1, \dots, X_n]$ أحد هذه المثاليات نستطيع أخذ مثاليات أولية : لرؤية هذا طبق التمرين 11 من ف 18 وذلك بعد ملاحظة أن المثالي A مطابق لجذره ، لأن العلاقة

$$f(x)^q = 0$$

على V ، تستلزم $f(x) = 0$ على V ، وهذا لأسباب بديهية) . نكتب إذن

$$A = \mathcal{P}_1 \cap \dots \cap \mathcal{P}_s$$

حيث ترمز العناصر $\mathcal{P}_i$ إلى المثاليات الأولية الأصغرية لـ A ، ولتكن V_i المنوعة الجبرية لـ C^n المؤلفة من العناصر x بحيث :

$$f(x) = 0, \quad \forall f \in \mathcal{P}_i$$

(إن V_i مُعرّف بعدد منته من المعادلات : خذ مثلاً مولدات $\mathcal{P}_i$) .

لما كان $\mathcal{P}_i$ أولياً ، فإن V_i غير قابلة للاختزال . ولدينا :

$$V = V_1 \cup \dots \cup V_s$$

نقول عن العناصر V_i انها مركبات غير قابلة للاختزال لـ V . بعد هذا ، تبين خاصية الحلقة $C[X_1, \dots, X_n]$ المتمثلة في كونها عاملية أنه إذا كان V سطحاً مصعداً (أي إذا كان V معرفاً بمعادلة واحدة) فإن

الأمر كذلك فيما يخص مركباتها غير القابلة للإختزال؛ أو بعبارة أخرى، أنه إذا كانت منوعة غير قابلة للإختزال W محتواة في سطح مصعد V، فإنه يوجد سطح مصعد غير قابل للإختزال W' بحيث $V \supset W' \supset W$، وهي نتيجة «بديهية» إذا نظرنا إليها من الزاوية الهندسية . . .

هناك مثال آخر بالغ الأهمية. للحلقات العاملية، وهو (ويرستراس) حلقة السلاسل الصحيحة المتقاربة (أي التي تحتوي ساحة تقاربها على عناصر أخرى غير 0) لـ n متغيراً عقدياً؛ تدخل هذه الحلقة في الدراسة «المحلية» «للمنوعات التحليلية» في $\mathbf{C}^n$ (وهي أجزاء $\mathbf{C}^n$ المعرّفة بمعادلات، أطرافها الأولى توابع هولومرفية). نُلاحظ أخيراً أن هذه الحلقة نوثرية].

م م 32. عمم قاعدة ايزنشتين (التمرين 11) لعدم قابلية الإختزال، على الحلقات العاملية.

م 1. لتكن G_n مجموعة الأعداد العقدية z التي تحقق $z^n = 1$.

أ) اثبت أن G_n زمرة جزئية من الرتبة n للزمرة الضربية C^* للأعداد العقدية غير المنعدمة .

ب) ليكن

$$z = \cos(2k\pi/n) + i \cdot \sin(2k\pi/n)$$

عنصراً من G_n ؛ لكي يكون z مولداً للزمرة G_n (أي لكي يكون كل جذر من الرتبة n للوحدة، قوة لـ z) يلزم ويكفي أن يكون k أولياً مع n (نقول عندئذٍ أن z جذراً بدائياً من الرتبة n ، للوحدة)

جـ) بدون افتراض أن k وَ n أوليان فيما بينهما، اثبت أن رتبة z في الزمرة G_n (أي أصغر عدد صحيح $1 \leq d$ بحيث $z^d = 1$) هو حاصل قسمة n على أكبر قاسم مشترك لـ k وَ n ؛ وأن z يصبح عندئذٍ جذراً بدائياً من الرتبة d للوحدة .

د) ليكن $\varphi(n)$ عدد الجذور البدائية من الرتبة n للوحدة . اثبت أن $\varphi(n)$ يساوي عدد الصحيحات k ، بحيث $1 \leq k \leq n$ ، الأولية مع n ، وأنه يساوي أيضاً عدد العناصر القابلة للقلب في الحلقة Z/nZ . اثبت أن

$$n = \sum_{d/n} \varphi(d)$$

المجموع هنا مؤخوذ على كل القواسم d لـ n (أي أن الرمز d/n يعني بأن d يقسم n) . اثبت أن :

$$\varphi(n) = n(1 - \frac{1}{p_1}) \dots (1 - \frac{1}{p_r})$$

حيث يرمز p_r ، ... ، p_1 لمختلف القواسم الأولية لـ n .

ر) صنف وفق الرتب ، الجذور النونية للوحدة من أجل n يساوي 2 ، 3 ، 4 ، 6 ، 8 ، 12 ، 16 ، 20 ، 24 . احسب الأجزاء الحقيقية والخيالية لكل الجذور من الرتبة 24 للوحدة .

م 2. ليكن K حقلاً تبديلياً و n صحيحاً بحيث المعادلة $x^n = 1$ تقبل n جذراً في K . اثبت أن الزمرة الجزئية من الرتبة n للزمرة الضربية K^* المؤلفة من جذور هذه المعادلة ، زمرة دورية (إستعمل التمرين 20 من ف 7) .

إستنتج أنه إذا كان K حقلاً منتهياً من q عنصراً ، فإن الزمرة الضربية K^* دورية (اعتبر المعادلة :

$$x^{q-1} = 1$$

في K) .

بصفة خاصة ، مهما كان العدد الأولي p ، فإن الزمرة الضربية $(Z/pZ)^*$ دورية .

م 3. ليكن K حقلاً تبديلياً منتهياً من q عنصراً . لتكن $a_1, \dots, a_{q-1}$ عناصر K غير المنعدمة . اثبت أنه إذا رمزنا بـ X لمتغير على K فإن :

$$(X - a_1) \dots (X - a_{q-1}) = X^{q-1} - 1$$

(إستعمل النظرية 1 من ف 33) ثم إستنتج أن :

$$a_1 \dots a_{q-1} = -1$$

(نستعمل بهذا الصدد ، بهدف تعيين الإشارة ، الخاصية القائلة بأن q قوة للمميزة p لـ K : التمرين 8 ، ف 30) . بأخذ $K = Z/pZ$ ، إستنتج من ذلك نظرية ويلسن وهي :

$$(p - 1)! \equiv -1 (\text{mod } p)$$

من أجل كل عدد أولي p

م 4. ليكن p عدداً أولياً و r عدداً صحيحاً. نقول عن عدد صحيح n أولي لـ p إنه قوة (أو قدرة) من الرتبة r وفق p (إذا كان $r = 2$، نقول عنه أنه باق تربيعي وفق p) إذا وجد صحيح x بحيث

$$x^r \equiv n \pmod p$$

باستعمال الخاصية القائلة أن الزمرة الضربية $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ دورية (التمرين 2) بين أن كل n أولي مع p، قوة من رتبة r وفق p، عندما يكون r أولياً لـ $p - 1$. إذا كان r قاسماً لـ $p - 1$ (مثال: $r = 2$ و p فردي، وهي أهم حالة) فإن الشرط اللازم والكافي لكي يكون صحيح n أولي لـ p، قوةً من رتبة r وفق p هو أن نتحقق:

$$n^{\frac{p-1}{r}} \equiv 1 \pmod p$$

إن عدد الصفوف وفق p للقوى من الرتبة r وفق p هي $\frac{p-1}{r}$ (فمثلاً إذا كان p فردياً فإن هناك $\frac{p-1}{2}$ باقياً تربيعياً وفق p)

نأخذ $p = 31$. من أجل كل قاسم r لـ $p - 1 = 30$، وجد القوى من الرتبة r وفق p.

م 5. (يعتمد هذا التمرين على التمرين 1). من أجل كل صحيح $n \geq 1$، نسمي **كثير حدود قاسم الدورة**، دليله n كثير الحدود

$$\Phi_n(X) = (X - \xi_1) \ldots (X - \xi_h)$$

الذي جذوره هي الجذور البدائية من الرتبة n للوحدة في حقل $\mathbb{C}$ والبالغ عددها $h = \varphi(n)$؛ إن لهذا كثير الحدود معاملات عقدية على ما يبدو لكن هذه المعاملات صحيحة ناطقة، وهو ما سنبينه الآن.

لنضع $\Phi_1(X) = X - 1$.

أ) اثبت أن:

$$\Phi_p(X) = 1 + X + X^2 + \ldots + X^{p-1}$$

عندما يكون p أولياً.

ب) تأكد من أن :

$$\Phi_{12}(X) = X^4 - X^2 + 1$$

ج) اثبت أن لدينا العلاقة التالية مهما كان الصحيح $n \geq 1$:

$$X^n - 1 = \prod_{d/n} \Phi_d(X)$$

حيث يرمز d/n في الجداء الأيمن إلى كون d يقسم n (بما في ذلك 1 وَ n نفسه) . (إستعمل تحليل كثير الحدود $X^n - 1$ إلى جداء عوامل من الدرجة الأولى) .

د) بإستعمال العلاقة :

$$\Phi_n(X) = \frac{X^n - 1}{\prod_{\substack{d/n \\ d \neq n}} \Phi_d(X)}$$

وبالإستدلال بالتدريج على n ، اثبت أن معاملات Φ_n صحيحة ناطقة .

(تُعمم هذه النتائج لتشمل كل الحقول المُغلقة جبرياً K ، شريطة الإقتصار على الصحيحات n التي لا تقبل القسمة على المميز p للحقل K ، والحقيقية أن الشرط الآخير ليس بشرط مقيد حسب التمرين 14 من ف 30) .

م م6. اثبت أنه يوجد على مجموعة الصحيحات $n \geq 1$ ، تابع وحيد μ (تابع موبييس) قيمه صحيحة ، يُحقق العلاقة :

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1 & ; n = 1 \\ 0 & ; n > 1 \end{cases}$$

(يرمز d/n إلى أن d يقسم n ، ونُلاحظ أن $1 \leq d \leq n$) .

اثبت أن لدينا :

$\mu(1) = 1$

$\mu(p) = -1$ إذا كان p أوليا

$\mu(p^r) = 0$ إذا كان p أوليا و $2 \leq r$

اثبت أن لدينا العلاقة التالية عندما يكون m وَ n أوليين فيما بينهما :

$$\mu(mn) = \mu(m)\,\mu(n) \qquad (*)$$

(نُلاحظ أن كل قاسم لِـ mn ، عندما يكون m وَ n أوليين فيما بينهما ، يكتب بطريقة وحيدة على شكل جداء لقاسم لِـ m وقاسم لِـ n ؛ ونجري البرهان بالتدريج وذلك بإفتراض أن (*) محققة من الثنائيات (m', n') بحيث $m'n' < mn$) .

إستنتج من النتائج السابقة ، أن :

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \text{ عندما} \\ (-1)^r, & r \text{ إذا كان } n \text{ جداء لعوامل أولية مختلفة عددها} \\ 0 & \text{إذا كان } n \text{ يقبل القسمة على مُربع عدد أولي} \end{cases}$$

احسب $\mu(n)$ ، من أجل $1 \leq n \leq 100$.

م م7. ليكن f تابعاً على مجموعة الصحيحات $1 \leq n$ ، يأخذ قيمه في زمرة جمعية A . نعرف تابعاً جديداً g بوضع :

$$g(n) = \sum_{d/n} f(d)$$

(يرمز d/n إلى أن d يقسم n ، مع العلم ، وهذا واضح أن $1 \leq d \leq n$) . اثبت بخصوص القضية العكسية ، أن لدينا :

$$f(n) = \sum_{d/n} g(d)\,\mu\left(\frac{n}{d}\right)$$

حيث يرمز μ لتابع موبييس الوارد في التمرين السابق . (استعمل فقط الخاصية التي عرفت μ ، لا غير) .

كيف ينبغي تغيير الدساتير السابقة عندما تكون A زمرة تبديلية ضربية؟

م م **8.** (يعتمد هذا التمرين على التمارين 5، 6، 7) . اثبت أن كثيرات الحدود القاسمة للدورة معطاة بالعلاقة :

$$\Phi_n(X) = \prod_{d/n} (X^d - 1)^{\mu(n/d)}$$

احسب Φ_n من أجل : $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 15$ ، ثم اثبت أن

$$\begin{aligned}\Phi_{105}(X) = {} & X^{48} + X^{47} + X^{46} - X^{43} - X^{42} - 2X^{41} - X^{40} - X^{39} + \\ & + X^{36} + X^{35} + X^{34} + X^{33} + X^{32} + X^{31} - X^{28} - X^{26} - \\ & - X^{24} - X^{22} - X^{20} + X^{17} + X^{16} + X^{15} + X^{14} + X^{13} + \\ & + X^{12} - X^{9} - X^{8} - 2X^{7} - X^{6} - X^{5} + X^{2} + X + 1\end{aligned}$$

وهذا حسب ما أورده فاديف وَسومينسكي، ومالم يتأكد منه المؤلف . . .

9. حلل الكسر الناطق التالي إلى عناصر بسيطة عقدية :

$$\frac{f(X)}{X^n - 1}$$

حيث يُمثل f كثير حدود كيفي، معاملاته عقدية .

م **10.** لتكن $z_1, \dots, z_n$ الجذور من الرتبة n للوحدة في $\mathbf{C}$. اثبت أن

$$z_1^h + \dots + z_n^h = \begin{cases} n \;;\; h \equiv 0 \pmod n \\ 0 \;;\; h \not\equiv 0 \pmod n \end{cases}$$

(اضرب الطرف الأيسر في z_1^h) .

11. نرمز بـ $z_1, \dots, z_n$ للجذور من الرتبة n للوحدة في $\mathbf{C}$. برهن على العلاقات التالية :

$$\prod_{k=1}^{k=n} (a + b z_k) = a^n + (-1)^{n-1} b^n$$

$$\prod_{k=1}^{k=n} (z_k^2 - 2z_k \cos\theta + 1) = 2(1 - \cos n\theta)$$

$$\prod_{k=1}^{k=n-1} \frac{(t + z_k)^n - 1}{t} = \prod_{k=1}^{k=n-1} \left[t^n - (z_k - 1)^n\right]$$

12. لتكن u ، v ، w الجذور الثلاثة (المختلفة أو غير المختلفة) لمعادلة :

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

من الدرجة 3 ، معاملاتها عقدية . باستعمال نتائج المثال 4 من الفقرة 4 في ف 33 ، احسب ، بدلالة a ، b ، c ، d العبارتين :

$$u^2 + v^2 + w^2, \quad u^3 + v^3 + w^3$$

م13. لتكن $X_1, ..., X_n$ متغيرات على حلقة تبديلية K . **التوابع المتناظرة الأولية** لِـ $X_1, ..., X_n$ هي تعريفاً كثيرات الحدود :

$$s_1 = X_1 + X_2 + ... + X_n = \sum X_i$$

$$s_2 = X_1 X_2 + ... + X_{n-1} X_n = \sum_{1 \leq i < j \leq n} X_i X_j$$

$$s_3 = X_1 X_2 X_3 + ... = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} X_i X_j X_k$$

. . . .

$$s_n = X_1 X_2 ... X_n$$

(تدخل هذه العبارات ، راجع الفقرة 6 من ف 33 ، في حساب معاملات معادلة جبرية بدلالة جذورها) . من جهة أخرى ، نقول عن كثير حدود f من $K[X_1, ..., X_n]$ أنه **متناظر** إذا كان :

$$f(X_{s(1)}, ..., X_{s(n)}) = f(X_1, ..., X_n)$$

من أجل كل تبديل s للأعداد الصحيحة $1, ..., n$.

أ) برهن أن كل كثير حدود متناظر $f(X_1, ..., X_n)$ كثير حدود لِـ $s_1, ..., s_n$ ، معاملاته في K . [نستطيع إتباع طريقة الإستدلال بالتدريج على الصحيح $n + d°(f)$. لاحظ في البداية أن $f(X_1, ..., X_{n-1}, 0)$ متناظر لِـ $X_1, ..., X_{n-1}$ ، وبالتالي، أنه كثير حدود للتوابع المتناظرة الأولية لِـ $X_1, ..., X_{n-1}$ ، التي نحصل عليها بتعويض X_n بِـ 0 في التوابع المتناظرة الأولية لِـ $X_1, ..., X_n$. استنتج أنه يوجد كثير حدود $p(s_1, ..., s_{n-1})$ درجته أصغر من درجة f أو تساويها بحيث ينعدم كثير الحدود

$$g(X_1, ..., X_n) = f(X_1, ..., X_n) - p(s_1, ..., s_{n-1})$$

من أجل $X_n = 0$ ؛ استنتج، بمراعاة تناظر g ، ان

$$g(X_1, ..., X_n) = X_1 ... X_n\ h(X_1, ..., X_n)$$

حيث h متناظر وَ $d°(h) < d°(f)$] .

ب) برهن على أنه إذا حقق كثير حدود p من $K[X_1, ..., X_n]$ العلاقة $p(s_1, ..., s_n) = 0$ فإن $p = 0$ (استعمل طريقة التدريج على n ؛ وخذ درجة p أصغر درجة ممكنة بالنسبة لِـ s_n ، ثم اجعل $X_n = 0$ في النتيجة) .

ج) استنتج أن عبارة كثير حدود متناظر f بدلالة $s_1, ..., s_n$ وحيدة .

د) نفرض f متجانساً ودرجته الكلية لِـ $X_1, ..., X_n$ تساوي k ، ثم نضع :

$$f(X_1, ..., X_n) = p(s_1, ..., s_n)$$

بيّن أن وحيدات الحدود الوحيدة :

$$s_1^{r_1} ... s_n^{r_n}$$

التي تظهر بالفعل في p هي تلك التي لدينا من أجلها :

$$r_1 + 2r_2 + \ldots + nr_n = k$$

ر) احسب بدلالة المتناظرة الأولية كثيرات الحدود التالية :

$$X_1^2 X_2 + X_1 X_2^2 + X_1^2 X_3 + X_1 X_3^2 + X_2^2 X_3 + X_2 X_3^2 \quad (n = 3) .$$

$$(2X_1 - X_2 - X_3)(2X_2 - X_1 - X_3)(2X_3 - X_1 - X_2) \quad (n = 3)$$

$$(X_1 X_2 + X_3 X_4)(X_1 X_3 + X_2 X_4)(X_1 X_4 + X_2 X_3) \quad (n = 4)$$

$$\sum_{i \neq j} X_i^2 X_j^2; \quad \sum_{i \neq j \neq k} X_i^2 X_j^2 X_k; \quad \sum_{i \neq j \neq k} X_i^4 X_j X_k;$$

$$\sum_{s \in \mathfrak{S}_n} (a_1 X_{s(1)} + a_2 X_{s(2)} + \ldots + a_n X_{s(n)}),$$

$$\sum_{\substack{i > k \\ j \neq i, j \neq k}} (X_i + X_k - X_j)^2 \quad (\text{كيفي } n)$$

م**14.** نحتفظ برموز التمرين السابق، ونعتبر مجاميع نيوتن

$$\sigma_k(X_1, \ldots, X_n) = X_1^k + X_2^k + \ldots + X_n^k \qquad (k = 0, 1, \ldots)$$

اثبت أننا نستطيع كتابتها بدلالة $s_1, \ldots, s_n$ بواسطة الدساتير التالية :

$$\sigma_k - s_1 \sigma_{k-1} + s_2 \sigma_{k-2} \ldots + (-1)^{k-1} s_{k-1} \sigma_1 + (-1)^k s_k \sigma_0 = 0; k < n$$

$$\sigma_k - s_1 \sigma_{k-1} + \ldots + (-1)^n s_n \sigma_{k-n} = 0, k \geq n$$

احسب مجاميع نيوتن σ_k، من أجل $0 \leq k \leq \sigma$، بدلالة التوابع المتناظرة الأولية .

م**15.** لتكن

$$x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0$$

مُعادلة جبرية مُعاملاتها في حقل تبديلي K . لتكن $x_1, \ldots, x_n$ جذورها في توسيع مُغلق جبرياً من K (نستطيع أخذ $\mathbf{C}$ مع افتراض أن K حقل جزئي من $\mathbf{C}$، وهذا لا يسهل في الأمر شيئاً !) .

ليكن f كثير حدود متناظر لـ n متغيراً، معاملاته في K . اثبت أنه يوجد كثير حدود p لـ n متغيراً، معاملاته في K ، بحيث :

$$f(x_1, \ldots, x_n) = p(a_{n-1}, \ldots, a_0)$$

وأن p لا يتعلق بـ f (استعمل التمرين 13) . تطبيقات :

أ) احسب مجموع القوى من الرتبة الخامسة، لجذور المعادلة :

$$x^6 - 4x^5 + 3x^3 - 4x^2 + x + 1 = 0$$

ب) احسب المجموع :

$$\sum x_i^2 x_j^2 x_k x_h$$

حيث نرمز $x_1, \ldots, x_5$ لجذور المعادلة :

$$x^5 - 4x^3 + x^2 + 3x + 1 = 0$$

جـ) نرمز بـ x_1, x_2, x_3 لجذور المعادلة :

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

شكّل المعادلات التي تقبل الجذور التالية :

1) $x_1 + x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 + x_3$ ؛

2) $x_1^2 - x_2 x_3 \cdot x_2^2 - x_3 x_1 \cdot x_3^2 - x_1 x_2$

3) $(x_1 + jx_2 + j^2 x_3)^3 \cdot (x_1 + j^2 x_2 + jx_3)^3$

حيث $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

م 16. لتكن

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \qquad (*)$$

معادلة جبرية مُعاملاتها في حقل تبديلي K . نرمز بـ $x_1, \ldots, x_n$ لجذورها (مختلفة كانت أو غير مختلفة) في توسيع مغلق جبرياً لـ K . مميز المعادلة المعطاة هو تعريفاً العبارة :

$$D = \prod_{1 \le i < j \le n} (x_i - x_j)^2$$

أ) اثبت أنه يوجد كثير حدود p لـ n متغير، معاملاته في R، لا يتعلق بالمعادلة (*) بحيث:

$$D = p(a_{n-1}, \dots, a_0)$$

ب) احسب مميز معادلة من الدرجة 2، 3، 4.

ج) لكي يكون للمعادلة (*) جذر مزدوج على الأقل، يلزم ويكفي أن يكون مميزها منعدماً.

د) عيّن قيم λ التي من أجلها يكون للمعادلات التالية جذر مزدوج على الأقل:

$$x^3 - 3x + \lambda = 0 \; ; \; x^3 - 8x^2 + (13 - \lambda)x - 6 - 2\lambda = 0$$
$$x^4 - 4x^3 + (2 - \lambda)x^2 + 2x - 2 = 0$$

ر) اثبت أن مميز المعادلة:

$$x^n + px + q = 0$$

يساوي:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} n^n q^{n-1} + (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} (n-1)^{n-1} p^n$$

س) نرمز بـ f لكثير الحدود الظاهر في الطرف الأيسر من معادلة (*) . اثبت أن المميز D للمعادلة (*) معطى أيضاً بالدستور:

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D = \prod_{1 \le i \le n} f'(x_i)$$

ص) اثبت أن مميز المعادلة

$$\frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + 1 = 0$$

يساوي

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

. م م ط) نعتبر (التمرين 5) المعادلة القاسمة للدورة:

$$\Phi_n(x) = 0$$

اثبت أن مميزها يساوي

$$(-1)^{\frac{\varphi(n)}{2}} \quad \frac{n^{\varphi(n)}}{\prod_{p/n} p^{\frac{\varphi(n)}{p-1}}}$$

(استخدم السؤال س) والتمرين 8) .

م 20. ليكن K حقلاً تبديلياً و f كثير حدود لمتغير واحد، معاملاته في K . نُريد البرهان على وجود حقل L ، يكون توسيعاً لـ K (أي أن K حلقة جزئية منه) ويقبل فيه f جذراً على الأقل (تُعتبر هذه النتيجة خطوة أولى لإثبات نظرية ستاينيتز) .

أ) اثبت أننا نستطيع دوماً الرجوع إلى الحالة التي يكون فيها f قابلاً للاختزال على K .

ب) نعتبر في حلقة كثيرات الحدود $A = K[x]$ المثالي $I = (f)$ المولد عن f، ونكون الحلقة $L = A/I$ (التمرين 7، ف 8) . اثبت أن L حقل .

ج) ليكن j التطبيق من K في L الذي يُلحق بكل c في K صنفه وفق I لكثير الحدود الثابت c . اثبت أن هذا التطبيق تشاكل لـ K على حقل جزئي من L (نتفق فيما يلي على مُطابقة كل عنصر c من K صورته $j(c)$ في L) .

د) ليكن z (من L) صورة كثير الحدود x بواسطة التطبيق القانوني لـ$K[X]$ على L . اثبت أن z جذر لـf، وأن $L = K[z]$. (وهو ما يُثبت النتيجة المنصوص عليها) .

ر) نأخذ $f(X) = X^2 - d$ حيث d ينتمي إلى K ولا يساوي مربع عنصر من K . اثبت أن الإنشاءات السابقة تعود حينئذٍ إلى انشاءات الفصل 9 . تأكد على وجه الخصوص من ان الحقل C يساوي

نسبة الحلقة $\mathbb{R}[X]$ على المثالي المولد عن كثير الحدود $X^2 + 1$ (نعود طريقة الإنشاء هذه للحقل $\mathbb{C}$، إلى كوشي).

س) نأخذ $f(X) = X^3 + pX + q$ ونفرض أنه غير قابل للإختزال على K. المطلوب إعطاء وصف للحقل L الموافق لـ f، يماثل الوصف الذي قدم في الفصل 9 بخصوص الحلقات $K[\sqrt{d}]$.

ص) ماذا يحدث في الإنشاءات السابقة، لو كان كثير الحدود f غير قابل للإختزال؟

م م 21. لتكن $f_1, \ldots, f_n$ كثيرات حدود غير ثابتة متعلقة بمتغير واحد، معاملاتها في حقل تبديلي K. اثبت أنه يوجد في الحلقة $K[X_1, \ldots, X_n]$ مثالي أعظمي (أو أكبري) يحتوي على $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ (استعمل التمرين 15 من ف 27).

باتباع الطريقة الواردة في التمرين السابق، استنتج وجود توسيع جبري L لـ K يقبل فيه كل f_i جذراً على الأقل. (إن البرهان الكامل على نظرية ستاينيتز امتداد مباشر للإستدلال الوارد في هذا التمرين؛ ندخل حلقة كثيرات حدود لعدد غير منته من المتغيرات، تحتوي على مقدار من المتغيرات يساوي (كذا) عدد كثيرات حدود غير القابلة للإختزال التي معاملاتها في K ومعاملها الأساسي يساوي 1، ثم نأخذ نسبة هذه الحلقة على مثالي أعظمي لائق).

م م 22. نحتفظ برموز التمرين السابق، اثبت أن كل مثالي أولي للحلقة $K[X_1, \ldots, X_n]$ التي تحتوي على:

$f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$، هو مثالي أعظمي (التمرين 3، ف 26).

م 23. ليكن K حقلاً تبديلياً. نقول عن توسيع L لـ K (أي أن K حقل جزئي من L) أنه جبري إذا كان كل x من L جبرياً على K. اثبت أنه لكي يكون K مُغلقاً جبرياً، يلزم ويكفي أن يكون $L = K$ من أجل كل توسيع جبري لـ K.

24. إن كل حقل مُغلق جبرياً، يحتوي حتماً على عدد غير منته من العناصر.

م 25. (برهان نظرية دالمبار - غوس). نفرض في هذا التمرين أن خاصيات التوابع المستمرة في المستوى معروفة (وخاصة تلك التي تنص على أن كل تابع مستمر موجب على مجموعة متراصة يبلغ قيمته الصغرى عند نقطة من المجموعة المعتبرة).

نرمز بـ:

$$f(z) = a_0 + \dots + a_n z^n$$

لـكثير حدود غير ثابت، معاملاته عقدية، نفرض $a_n \neq 0$.

أ) اثبت أن النسبة:

$$f(z)/a_n z^n$$

تؤول إلى 1 عندما يسعى $|z|$ إلى لا نهاية، أي أن مهما $\varepsilon > 0$، يوجد $r > 0$ بحيث $|z| > r$ تستلزم

$$\left|1 - \frac{f(z)}{a_n z^n}\right| < \varepsilon$$

ب) لتكن

$$m = \operatorname*{Inf}_{z \in \mathbf{C}} |f(z)|$$

اثبت أنه يوجد عدد $r' > 0$ بحيث:

$$|z| \geq r' \Rightarrow |f(z)| \geq m + 1$$

بتطبيق نظرية القيمة الصغرى للتابع المستمر $|f(z)|$ على المجموعة المتراصة $|z| \leq r'$، اثبت وجود عنصر z_0 من $\mathbf{C}$ بحيث:

$$|f(z_0)| = m$$

[إذا كانت نظرية دالمبار صحيحة، فمن الواضح أن $m = 0$؛ لكي نبرهن على أن النظرية المعتبرة صحيحة، ينبغي إذن، وهذا كافٍ بطبيعة الحال، أن نُبيّن بأن $m = 0$. هذا ما سنراه في السؤال الموالي.]

ح) نفرض $m \neq 0$ ، نعوّض z بـ $z - z_0$ و f بـ $f / f(z_0)$ ، نعود إلى الحالة التي يكون فيها :

$$f(0) = 1, \quad |f(z)| \geq 1, \; \forall z \in \mathbb{C}$$

ليكن :

$$f(z) = 1 + b_q z^q + b_{q+1} z^{q+1} + \dots + b_n z^n ; \quad b_q \neq 0$$

اثبت وجود عدد $M > 0$ بحيث

$$|z| \leq 1 \Rightarrow |f(z) - 1 - b_q z^q| \leq M \cdot |z|^{q+1}$$

استنتج من ذلك أن لدينا $|f(z)| < 1$ (وهذا تناقض مع الفرض، ومنه ينتهي البرهان) شرط أن يكون z مختاراً بحيث :

$$|z| \leq 1, \; |z| < |b_q| / M, \; \operatorname{Arg}(b_q) + q \operatorname{Arg}(z) = \pi$$

م م 26. ليكن E حقلاً تبديلياً مغلقاً جبرياً، و L حقلاً تبديلياً كيفياً، و σ تشاكلاً من L على حقل جزئي L' من E. نعتبر توسيعاً M لـ L ونفرض أن $M = L[z]$ حيث z جبري على L. ليكن :

$$f(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$$

كثير الحدود لـ z على L؛ نرمز بـ :

$$f^{\sigma}(X) = X^n + \sigma(a_{n-1}) X^{n-1} + \dots + \sigma(a_0)$$

كثير الحدود، الذي تنتمي معاملاته لـ L'، والذي يستخرج من f بواسطة σ؛ ثم نعتبر جذراً z' لـ f^{σ} في E؛ ليكن $M' = L'[z']$. اثبت وجود تشاكل σ' من M على M' يطابق σ على L، ويطبق z على z'.

استنتج من ذلك ما يلي : ليكن E توسيعاً مغلقاً جبرياً لحقل تبديلي K، و L توسيعاً درجته منتهية، لـ K. يوجد عندئذ تشاكل f من L على حقل جزئي من E بحيث : $f(x) = x$ مهما كان x في K. (اتبع طريقة التدرج على درجة L على K. وستطيع من جهة

أخرى أن نُبين بأن النتيجة تظل قائمة من أجل كل توسيع جبري درجته منتهية أو غير منتهية، لـ K).

م م 27. ليكن K حقلاً تبديلياً، و E توسيعاً مغلقاً جبرياً لـ K، و L توسيعاً من درجة منتهية لـ K؛ نفرض أن L يقبل الفصل على K (التمرين 4، ط)، ف 26) ونضع $n = [L : K]$. اثبت أن عدد التشاكلات j من L في E بحيث $j(x) = x$ من أجل x في K يساوي بالضبط n (اتبع الطريقة الواردة في التمرين 26، مستعملاً التمرين 11 من ف 32).

نرمز بـ $j_1, \ldots, j_n$ للتشاكلات المعتبرة. من أجل $k \neq h$ نرمز بـ L_{kh} لمجموعة العناصر z من L بحيث: $j_k(z) = j_h(z)$؛ اثبت أنها حقل جزئي من L يحتوي K ويخالف L.

نفرض K غير منته، اثبت أن اتحاد المجموعات L_{kh} لا يساوي L كله، وأنه يوجد z من L بحيث تكون العناصر $j_h(z)$ البالغ عددها n، مختلفة مثنى مثنى. استنتج أنه إذا كان L توسيعاً قابلاً للفصل من درجة منتهية لحقل K غير منته، فإنه يوجد z في L بحيث $L = K[z]$ (نظرية العنصر البدائي التي اثبتت في البداية من طرف ديدكند من أجل حقول الأعداد الجبرية، أي من أجل $K = \mathbf{Q}$؛ والواقع أن هذه النظرية تبقى صالحة عندما يكون K منتهياً وذلك نظراً للتمرين 2 أعلاه).

م 28. نعتبر التوسيع

$$L = \mathbf{Q}\left[\sqrt{3}, \sqrt[3]{2}\right]$$

لـ $\mathbf{Q}$. انشئ عدداً جبرياً z بحيث $L = \mathbf{Q}[z]$.

م م 29. ليكن K حقلاً تبديلياً، و L توسيعاً لـ K قابلاً للفصل، درجته n منتهية، و E توسيعاً مُغلقاً جبرياً لـ K، وَ $j_1, \ldots, j_n$ التشاكلات من L في E، البالغ عددها n، والمحققة للعلاقة $j_k(x) = x$ من أجل كل x في K (التمرين 27). نريد البرهان على:

$$Tr_{L/K}(z) = j_1(z) + \dots + j_n(z)$$

$$N_{L/K}(z) = j_1(z) \dots j_n(z)$$

من أجل كل z من L .

أ) ليكن $(a_i)_{1 \le i \le n}$ أساساً لـ L على K . اثبت أن المصفوفة

$$A = \big(j_k(a_h)\big)_{1 \le k, h \le n}$$

(ذات المعاملات في E) تقبل القلب (استعمل التمرين 16 من الفصلين 10 وَ 11 ، وكذا خاصيات جمل كرامر) .

ب) من أجل كل z في L ، نضع :

$$z\, a_i = \sum_j \xi_{ij}\, a_j$$

حيث تنتمي العناصر ξ_{ij} إلى K ؛ ندخل المصفوفتين :

$$U_z = (\xi_{ij})_{1 \le i, j \le n}$$

وَ

$$D_z = \begin{pmatrix} j_1(z) & 0 \dots 0 \\ 0 & j_2(z) \dots 0 \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \dots j_n(z) \end{pmatrix}$$

اثبت أن لدينا العلاقة

$$U_z = A\, D_z\, A^{-1}$$

جـ) اختم البرهان بملاحظة أن $Tr_{L/K}(z) = Tr\,(U_z)$ وأن $N_{L/K}(z) = \det\,(U_z)$ (راجع التمرين 4 ، ف 26) .

[يُلاحظ القارئ أن هذا الإستدلال يُبين كذلك أن القيم الذاتية في E للتماثل الداخلي :

$$u_z : X \to z\,X$$

لـ L ، حيث ننظر لـ L كفضاء شعاعي بُعده n على K ، هي بالضبط $j_k(z)$ ، $1 \le k \le n$]

30. اثبت أن كثير الحدود

$$X^{n_1} + X^{n_2} + \dots + X^{n_k}$$

حيث $n_r \equiv r - 1 \pmod{k}$ ، يقبل القسمة على كثير الحدود :

$$1 + X + X^2 + \dots + X^{k-1}$$

م 31. ما هي قيم r التي تجعل $\Phi_n\ (X^r)$ يقبل القسمة على كثير الحدود $\Phi_n(X)$؟

32. ليكن f كثير حدود لمتغير واحد، معاملاته في حقل تبديلي. إذا كان $f(X^n)$ يقبل القسمة على $X - 1$ ، فإن $f(X^n)$ يقبل القسمة على $X^n - 1$.

م م 33. (برهان «النولستالانساتز» Nullstellensatz ، لهيرلبرت) .

أ) ليكن L حقلاً تبديلياً وَ A حلقة جزئية من L ؛ نفرض أنه توجد عناصر $y_1, \dots, y_q$ من L ، عددها منته ، بحيث :

$$L = A[y_1, \dots, y_q]$$

كما نفرض أن كل y_i يُحقق علاقة جبرية غير تافهة، معاملاتها في A . اثبت أنه يُوجد عنصر $b \neq 0$ من A بحيث :

$$L = A[b^{-1}]$$

(اختر b بحيث يكون L مقياساً على $A[b^{-1}]$ ، من صنف منته ، ثم طبق التمرين 24 من ف 19) .

ب) اثبت أن كل مثالي أولي غير منعدم من الحلقة A يحتوي b .

ج) نفرض أنه يوجد حقل جزئي K من L بحيث تكون A الحلقة الجزئية من L المولدة عن K وعن عدد منته من عناصر L ، مستقلة جبرياً على K . اثبت عندئذٍ أن $A = K$ وأن L توسيع جبري ، درجته منتهية ، لِـ K (لاحظ أن تقاطع مثاليات أولية غير منعدمة ، في حقل كثيرات حدود على حقل ، مجموعة تضم عنصر الصفر لا غير) .

د) ليكن K حقلاً تبديلياً وَ L توسيعاً لِـ K ؛ نفرض أنه يوجد عدد منته من العناصر $z_1, ..., z_r$ المنتمية لِـ L ، بحيث :

$$L = K[z_1, ..., z_r]$$

اثبت عندئذٍ أن L توسيع جبري ، درجته منتهية ، لِـ K ، وأن لدينا على وجه الخصوص $L = K$ إذا كان K مُغلقاً جبرياً [إستخرج من الجماعة $z_1, ..., z_r$ ما أمكن من العناصر المستقلة جبرياً ، ثم طبّق ج) على الحلقة A المولدة عن K وعن هذه العناصر] .

ر) ليكن K حقلاً تبديلياً وَ m مثالياً أعظمياً من حلقة كثيرات الحدود $K[X_1, ..., X_r]$ ؛ أثبت أن حلقة النسبة $L = K[X_1, ..., X_r]/m$ حقل يُمثل توسيعاً جبرياً لِـ K ، من درجة منتهية [طبق السؤال د) والتمرين 7 من ف 8] . استنتج «النولستالانساتز» [أنظر برهان آخر ضمن التمرين 51 ، ف 35] .

م م 34. ليكن p عدداً أولياً و $k = \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ حقل الصحيحات وفق p . إذا كان

$$f(X) = f(X_1, ..., X_n)$$

كثير حدود لِـ n متغيراً ، مُعاملاته في k ، نرمز بِـ $S(f)$ لمجموع قيم f ، أي أننا نضع :

$$S(f) = \sum_{x_i \in k} f(x_1, ..., x_n)$$

أ) نفرض أن f وحيد حد : $X_1^{m_1} ... X_n^{m_n}$. أثبت أن لدينا عندئذٍ $S(f) = 0$ إلاّ إذا كانت العناصر m_i قابلة للقسمة على $p-1$ وكانت أكبر من 1 أو تساويه وهي الحالة التي تعطي $S(f) = (-1)^n$. (ارجع إلى حالة متغير واحد) .

ب) إستعمل أ) لإثبات أن $S(f) = 0$ عندما يكون $\deg(f) < n(p-1)$.

ج) ليكن $\varphi(X) = \varphi(X_1, ..., X_n)$ كثير حدود معاملاته في k . نضع

$$f(X) = 1 - \varphi(X)^{p-1}$$

أثبت أن لدينا :

$f(x) = 1$ إذا كان $\varphi(x) = 0$ ، $x \in k^n$

$f(x) = 0$ إذا كان $\varphi(x) \neq 0$ ، $x \in k^n$

استنتج أن العدد $N(\varphi)$ لجذور φ في k^n يحقق الموافقة :

$$N(\varphi) \equiv S(f) \pmod p$$

د) نفرض أن $\deg(\varphi) < n$. استنتج من ب) و جـ) أن لدينا $N(\varphi) \equiv 0 \pmod p$.

بصفة خاصة إذا كان φ بدون حد ثابت فإن له على الأقل جذراً يخالف $(0, ..., 0)$ (نظرية شفالي) .

ر) عمم ما سبق ليشمل عدداً منتهياً من المعادلات $\varphi_\alpha(x) = 0$ حيث $\sum \deg(\varphi_\alpha) < n$. (خذ f مساوياً لجداء العوامل $(1 - \varphi_\alpha^{p-1})$.

أجب عن الأسئلة التالية بالنسبة لكل مصفوفة من المصفوفات الواردة في التمارين من 1 إلى 14 :

أ) إحسب القيم الذاتية (نأخذ C كحقل أساسي) .

ب) من أجل كل قيمة ذاتية ، إحسب الأشعة الذاتية الموافقة لها في C^n (نطابق كل مصفوفة مربعة من الرتبة n ، معاملاتها عقدية ، بتماثل داخلي لـ C^n) .

ج) أوجد ، إن كان ذلك ممكناً ، أساساً مؤلفاً من أشعة ذاتية .

د) إذا كانت المصفوفة المعتبرة قابلة للتأقطر على C ، عيّن أصغر حقل جزئي من C تقبل فيه المصفوفة التأقطر .

ر) إذا كانت المصفوفة المعتبرة غير قابلة للتأقطر على C ، أوجد أساساً لـ C . يجعل التماثل الداخلي لـ C^n (الموافق للمصفوفة) يقبل مصفوفة مثلثية بالنسبة لهذا الأساس .

.1 $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ ، .2 $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$

.3 $\begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ ، .4 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

5. $\begin{pmatrix} 9 & -6 & -2 \\ 18 & -12 & -3 \\ 18 & -9 & -6 \end{pmatrix}$ ، 6. $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$

7. $\begin{pmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 3 & 4 & -12 \\ 2 & 3 & -8 \end{pmatrix}$ ، 8. $\begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

9. $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ ، 10. $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$

11. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \\ 2 & -2 & 0 & -1 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ ، 12. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

13. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \ldots 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \ldots 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 2 & 3 & 4 \ldots n \end{pmatrix}$ ، 14. $\begin{pmatrix} 0 & c & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \ldots 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & c \\ c & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 0 \end{pmatrix}$

(للمصفوفة 14 ، n سطراً و n عموداً) .

15. ليكن L فضاء شعاعياً بعده منته على حقل تبديلي K ، و u تماثلاً داخلياً لِـ L . ليكن L^* ثانوي L و u' التماثل الداخلي لِـ L^* ، وهو منقول u .

أ) اثبت أن القيم الذاتية لِـ u و u' متساوية .

ب) لتكن λ من K قيمة ذاتية لِـ u ؛ نرمز بِـ $E(\lambda)$ لمجموعة العناصر x من L بحيث $u(x) = \lambda x$. وبِـ $F(\lambda)$ لمجموعة العناصر f من L^* بحيث $u'(f) = \lambda f$. اثبت أن :

$$\dim E(\lambda) = \dim F(\lambda)$$

(إستعمل التمرين 12 من ف 10) .

جـ) اثبت أن كثيري الحدود المميزين لـ u و u^* متساويان (استطيع البرهان على أن كل مصفوفة مربعة معاملاتها في حقل تبديلي K ، مشابهة لمنقولتها ؛ راجع التمرين 10 ، ف 35) .

16. لتكن $G = SL(2, \mathbb{R})$ زمرة المصفوفات :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ذات معاملات الحقيقية ، وذات المعين $ad - bc = 1$.

أ) إذا كان :

$$|Tr(X)| > 2$$

توجد مصفوفة $\cup$ من G بحيث :

$$\cup X \cup^{-1} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$$

حيث t في $\mathbb{R}$ ، مع : $t \neq 0, 1, -1$ (نقول عندئذ أن X زائدية) .

ب) إذا كان :

$$|Tr(X)| < 2$$

توجد مصفوفة $\cup$ من G بحيث :

$$\cup X \cup^{-1} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

حيث t ينتمي إلى $\mathbb{R}$ (نقول عندئذٍ أن X ناقصية) .

جـ) إذا كان $X \neq 1_2, -1_2$ وكان $Tr(X)$ يساوي $+2$ ، -2 بالترتيب فإنه توجد عندئذٍ مصفوفة $\cup$ من G بحيث :

$\cup X \cup^{-1}$ تساوي $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ، $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

بالترتيب (نقول عندئذٍ أن X مكافئية) .

د) نرمز بـ K للزمرة الجزئية لـ G ، المؤلفة من المصفوفات ذات الشكل :

$$\begin{pmatrix} u & v \\ 0 & 1/u \end{pmatrix}$$

حيث u و v حقيقيان وَ $u > 0$. اثبت أن كل عنصر من G ، يكتب بطريقة وحيدة ، على الشكل XY حيث X ينتمي إلى K وَ Y إلى T .

إستنتج أننا نستطيع أن نفرض $U \in K$ في السؤال أ) وَ $U \in T$ في السؤال ب) .

17. لتكن $G = SL(2, C)$ زمرة المصفوفات :

$$X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

ذات المعاملات العقدية ، والمعين $ad - bc = 1$.

أ) اثبت أنه إذا كان :

$$Tr(X) \neq 2, -2$$

توجد مصفوفة U من G بحيث :

$$U X U^{-1} = \begin{pmatrix} t & 0 \\ 0 & 1/t \end{pmatrix}$$

حيث t ينتمي إلى C و $t \neq 0, 1, -1$.

ب) اثبت أنه إذا كان $X \neq I_2$ ، $X \neq -I_2$ بالترتيب وإذا كان $Tr(X)$ يساوي 2 ، -2 بالترتيب ، فإنه توجد مصفوفة U في G بحيث : $U X U^{-1}$ تساوي :

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} , \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

بالترتيب .

ج) نرمز بـ K لمجموعة المصفوفات من الشكل :

$$\begin{pmatrix} u & -\bar{v} \\ v & \bar{u} \end{pmatrix}$$

حيث u و v عددان عقديان يحققان :

$$|u|^2 + |v|^2 = 1$$

وبـ T لمجموعة المصفوفات

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

من G بحيث $c = 0$ وبحيث يكون a و d حقيقيين موجبين تماماً. اثبت أن K و T زمرتان جزئيتان من G، وأن كل عنصر من G يكتب بطريقة وحيدة على الشكل XY مع $X \in K$ و $Y \in T$.

م18. لتكن K حلقة تبديلية. باعتبار كثير الحدود :

$$f(X) = a_0 + a_1 X + \dots + a_r X^r$$

معاملاته في K، نعرف :

$$f(A) = a_0 \cdot 1_n + a_1 A + \dots + a_r A^r$$

من أجل كل مصفوفة A من $M_n(K)$.

أ) ليكن f و g كثيري حدود معاملاتهما في K؛ نضع :

$$f + g = p, fg = q, f\big(g(X)\big) = r(X)$$

اثبت أن :

$$p(A) = f(A) + g(A),\ q(A) = f(A)\,g(A) = g(A)\,f(A),$$
$$r(A) = f\big(g(A)\big)$$

(حاول تجنب كل الحسابات، وإستعمل نتائج الفصل 28، بكيفية ملائمة).

ب) اثبت أن :

$$f(U\ A\ U^{-1}) = U \cdot f(A) \cdot U^{-1}$$

عندما يكون $A \in M_n(K)$ و $U \in GL(n, k)$.

جـ) نفرض A مثلثية ، ونرمز بـ $t_1, ..., t_n$ للحدود القطرية ، اثبت أن $f(A)$ مثلثية وأن حدودها القطرية هي $f(t_1), ..., f(t_n)$.

د) نفرض K حقلاً . لتكن $t_1, ..., t_n$ القيم الذاتية لِـ A ، حيث A في $M_n(K)$ ، (المأخوذة في توسيع مغلق جبرياً لِـ K ، زيادة على ذلك ، نعين كل قيمة ذاتية عدداً من المرات يساوي عدد مضاعفاتها في المعادلة المميزة لِـ A ؛ يستطيع القارئ فرض $K = \mathbf{C}$ إذا كان غير منشغل بالحالة العامة .

اثبت أن القيم الذاتية لِـ$f(A)$ هي $f(t_1), ..., f(t_n)$ وأن :

$$\text{dét}\,(f(A)) = f(t_1) \ldots f(t_n), \quad Tr(f(A)) = f(t_1) + \ldots + f(t_n)$$

م **19.** ليكن :

$$f(X) = a_1 + a_2 X + \ldots + a_n X^{n-1}$$

كثير حدود معاملاته عقدية . اثبت أن :

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \ldots a_n \\ a_n & a_1 & a_2 \ldots a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_n & a_1 \ldots a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_2 & a_3 & a_4 \ldots a_1 \end{vmatrix} = f(z_1) \ldots f(z_n)$$

حيث ترمز $z_1, ..., z_n$ للجذور من الرتبة n للوحدة **(المعينات الدائرة)** ؛ إستعمل التمرين السابق) .

طبق هذه النتيجة على حساب المعينين :

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} , \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

20. ليكن s تبديلاً للأعداد الصحيحة $1, 2, ..., n$. نعتبر التماثل الداخلي u_s لِـ $\mathbf{C}^n$ المعطى بـ :

$$u_s(e_i) = e_{s(i)} \quad (1 \leq i \leq n)$$

حيث ترمز $(e_i)_{1\leq i\leq n}$ للأساس القانومي لِـ C^n . إستعمل تحليل s إلى دورات (التمرين 24 ، ف 7) عند حساب القيم الذاتية لِـ u_s واثبت أن u_s يقبل التأقطر .

م نعوض فيما سبق C بحقل تبديلي K مغلق جبرياً ، مميزته تساوي $p \neq 0$ ؛ نأخذ $n = p$ ، و s تبديلاً دائرياً . اثبت أن u_s لا يقبل التأقطر .

م **21.** ليكن V فضاء شعاعياً بعده منته على حقل تبديلي K ، و F مجموعة تماثلات داخلية لِـ V ؛ ، نقول عن F إنه **قابل للتثليث** (أو أن **التبسيط الآني إلى شكل مثلثي** ممكن من أجل F) إذا وجد أساس لِـ V يجعل مصفوفة كل u من F قابلة للتثليث ، بالنسبة إليه .

ليكن V' فضاءاً شعاعياً جزئياً من V مستقراً بواسطة F ، أي بحيث :

$$u(V') \subset V' \qquad \forall u \in F$$

(بدل مستقر نقول أيضاً أنه **لا متغير**) ؛ إذن فكل u من F يعرف تماثلاً داخلياً u' لِـ V' وتماثلاً داخلياً $\bar{u}$ للفضاء الشعاعي V/V' (تمرين ، ف 12) . لتكن F مجموعة العناصر u' و $\bar{F}$ مجموعة العناصر $\bar{u}$.

نفرض F' قابلاً للتثبيت في V' و $\bar{F}$ قابلاً للتثليث في V/V' .

اثبت أن F يقبل التثليث في V (إنشئ أساساً في V بالطريقة الواردة في برهان النظرية 1 من ف 18) .

إستنتج من ذلك برهاناً آخر للنظرية 3 من ف 34 .

م **22.** ليكن V فضاء شعاعياً بعده منته على حقل تبديلي K مغلق جبرياً (نستطيع فرض $K = C$ ، ويبقى البرهان كما هو...) و F مجموعة تماثلات داخلية لِـ V تتبادل فيما بينها مثنى مثنى . نريد البرهان على أن F يقبل التثليث (التمرين السابق) .

أ) من أجل كل u في F وكل قيمة ذاتية λ في K ، نرمز بـ $V_u(\lambda)$ للفضاء الجزئي المؤلف من العناصر x المنتمية لـ V بحيث $u(x) = \lambda x$.

اثبت أن $V_u(\lambda)$ مستقر بواسطة F .

ب) إستنتج أن العناصر u من F تقبل شعاعاً ذاتياً مشتركاً في V [إستعمل السؤال أ) وطريقة التدرج على $\dim(V)$] .

جـ) إختم البرهان بإستعمال التمرين السابق .

د) نفرض من جهة أخرى أن كل u من F يقبل التأقطر . اثبت وجود أساس لـ V يجعل مصفوفة كل u من F ، بالنسبة إليه ، قابلة للتأقطر («التبسيط الآني إلى شكل قطري» من أجل تماثلات داخلية قابلة للتأقطر وتتبادل مثنى مثنى) .

ر) اثبت أنه بالإمكان الإكتفاء بفرض كل u من F قابلاً للتثليث بدل فرض K مغلقاً جبرياً [أو الإكتفاء بقابلية التأقطر فيما يتعلق بالسؤال د)] .

م23. ليكن V فضاء شعاعياً بعده منته ، على حقل K و F مجموعة تماثلات داخلية لـ V . نقول عن F إنه **غير قابل للإختزال** إذا كانت الفضاءات الشعاعية الجزئية الوحيدة ، من V المستقرة بواسطة F هي $\{0\}$ و V .

أ) اثبت أنه إذا كان تماثل داخلي f لـ V يتبادل مع كل u من F . فإن الفضاءين ، الشعاعيين الجزئيين $\mathrm{Ker}(f)$ و $Im(f)$. والفضاءات الجزئية الذاتية لـ f مستقرة كلها بواسطة F .

ب) نفرض F غير قابل للإختزال و K مغلقاً جبرياً . برهن على أن التماثلات الداخلية الوحيدة لـ V التي تتبادل مع كل u من F هي التحاكيات (توطئة شور) .

جـ) نفرض F غير قابل للإختزال ولا نفرض شيئاً على K . اثبت

أن التماثلات الداخلية لـ V التي تتبادل مع كل u من F تشكل حقلاً جزئياً (قد يكون غير تبديلي) من حلقة التماثلات الداخلية لـ V .

د) نأخذ $K = \mathbb{R}$ و $V = \mathbb{R}^4$. إختر F بحيث يكون الحقل الجزئي الوارد في السؤال السابق ، الأربعيات الواردة في التمرين 11 ، ف 19 .

م 24. ليكن V فضاء شعاعياً بعده n منته على حقل تبديلي K مميزه 0 ، ولتكن G زمرة منتهية من التشاكلات الذاتية لـ V ، ونرمز بـ r لرتبة G .

أ) ليكن f تماثلاً داخلياً لـ V ، اثبت أن التماثل الداخلي

$$f^* = \frac{1}{r} \sum_{s \in G} s \circ f \circ s^{-1}$$

يتبادل مع كل العناصر s من G ، وأن لدينا $f = f^*$ وإذا وفقط إذا كان f يتبادل عند عناصر G . اثبت أن لدينا :

$$(f \circ g)^* = f^* \circ g$$

إذا كان g يتبادل عند عناصر G .

ب) ليكن W فضاء شعاعياً جزئياً من V لا متغيراً بواسطة G أي (التمرين 21) بحيث $s(W) \subset W$ مهما كان s في G (نبين بهذه المناسبة أن لدينا $s(W) = W$ من أجل كل s في G) . نختار (بمراعاة نتيجة النظرية 2 من ف 17 ، وكون W يقبل مكملاً في V) تماثلاً داخلياً p لـ V بحيث :

$$p^2 = p, \quad p(V) = W$$

اثبت من :

$$Im\,(p^*) = W$$

ج) نعتبر في السؤال ب) نواة p^* ، برهن على النظرية التالية : إن كل فضاء جزئي من V لا متغير بواسطة G ، يقبل حتماً مكملاً في V لا متغيراً بواسطة G .

د) ليكن V فضاءاً شعاعياً بعده منته على حقل مغلق جبري

مميزته 0 (خذ C مثلاً) ولتكن G زمرة تبديلية منتهية تتألف من تشاكلات ذاتية لِـ V. اثبت أنه يوجد أساس لِـ V يجعل مصفوفة كل عنصر s من G، قطرية بالنسبة إليه، زيادة على ذلك إذا كان G من الرتبة n فإن المعاملات القطرية لهذه المصفوفات جذور من الرتبة n للوحدة. [إستعمل السؤال ب) من التمرين 22].

ر) لتكن X مصفوفة مربعة معاملاتها في حقل مغلق جبري مميزته 0، إذا كان:

$$X^n = 1$$

من أجل صحيح $n \geq 1$، فإن X تقبل التأقطر. بيّن بواسطة مثال، أن هذه النتيجة لا تشمل الحقول التي لها مميزة p تخالف 0.

س) اثبت أن نتيجة السؤال ج) تظل قائمة عندما تكون المميزة $p \neq 0$ شريطة أن تكون الرتبة r للزمرة G لا تساوي مضاعفاً لِـ p. نفس النتيجة فيما يخص السؤال د).

م25. ليكن V فضاءاً شعاعياً بعده $n+1$ منته، على حقل تبديلي K مغلق جبرياً، مميزته 0. نعتبر ثلاثة تماثلات داخلية u، v، h لِـ V تحقق دساتير التبادل التالية:

$$[h, u] = 2u,\ [h, v] = -2v, [u, v] = -h$$

حيث وضعنا بصفة عامة $[f, g] = f \circ g - g \circ f$. نفرض أخيراً أن المجموعة $\{u, v, h\}$ لا تقبل الإختزال، أي أن الفضاءات الجزئية الوحيدة من V المستقرة في آن واحد بواسطة u و v و h هي $\{0\}$ و V.

أ) ليكن x في V و λ في K بحيث: $h(x) = \lambda x$. اثبت أن الشعاع $y = u(x)$ يحقق $h(y) = (\lambda + 2)y$، وأن الشعاع $z = v(x)$ يحقق $h(z) = (\lambda - 2)z$.

ب) اثبت وجود شعاع $x \neq 0$ وعدد سلمي λ من K بحيث:

$$h(x) = \lambda x,\quad u(x) = 0$$

ج) نفرض أن x يحقق ما جاء في السؤال ب)، ونضع:

$$x_k = v^k(x)/k! \quad (k \geq 0)$$

برهن على العلاقات :

$$h(x_k) = (\lambda - 2k)x_k$$
$$u(x_k) = (k - 1 - \lambda)x_{k-1}$$
$$v(x_k) = (k + 1)x_{k+1}$$

د) بمراعاة فرض عدم قابلية الإختزال المشار اليه في البداية إستنتج أن $\lambda = n$ وأن الأشعة $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ، البالغ عددها $n + 1$ ، تكوّن أساساً لِـ V . ما هي مصفوفات u ، v ، h بالنسبة لهذا الأساس؟ القضية العكسية؟ الحالة n يساوي 2 أو 3؟

ر) نأخذ V مساوياً للفضاء الشعاعي المؤلف من كثيرات الحدود لمتغير واحد وذات المعاملات في K والتي لا تتجاوز درجاتها العدد n . اثبت أن الوضعية الموصوفة في الأسئلة السابقة تصبح واقعاً إذا ما عرفنا u ، v ، h كما يلي : يحول u كل كثير حدود $f(X)$ إلى كثير الحدود $nXf(X) - X^2f'(X)$ ويحوّل v كل كثير حدود $f(X)$ إلى كثير الحدود $f'(X)$ ، ويحوّل h كل كثير حدود $f(X)$ إلى كثير الحدود $-nf(X) + 2Xf'(X)$ ؛ من الواضح أن f' يرمز إلى كثير الحدود المشتق لِـ f .

مم س) نعتبر من جديد الحالة العامة، ونستغني عن الفرض القائل أن الجماعة $\{u, v, h\}$ لا تقبل الإختزال . اثبت أن V مجموع مباشر لفضاءات جزئية مستقرة بواسطة u ، v ، h ، وإن إقتصارات u ، v ، h على هذه الفضاءات جماعة غير قابلة للإختزال .

م 26. ليكن V فضاءاً شعاعياً بعده منته على حقل K مغلق جبرياً ومميزته 0 (خذ $K = \mathbf{C}$ مثلاً) ، ولتكن u ، v ، w ثلاثة تماثلات داخلية لِـ V . نفرض :

$$[u, w] = [v, w] = 0, \quad [u, v] = w$$

اثبت وجود أساس لِـ V يجعل مصفوفات u ، v ، w ، مثلثية بالنسبة إليه . عيّن كل الحلول u ، v ، w للمسألة عندما يكون V ذا بعد يساوي 3 .

م م 27. ليكن V فضاء شعاعياً بعده منته على حقل تبديلي K . نقول عن مجموعة F من تماثلات داخلية لـ V ، إنها جبر لاي (من التماثلات الداخلية لـ V) إذا كان F فضاءاً شعاعياً (أي إذا كان لدينا $\alpha u + \beta v \in F$ مهما كان u و v في F و α و β في K) ، إذا كان لدينا ، زيادة على ذلك :

$$u \circ v - v \circ u \in F \quad \forall u, v \in F$$

(مثال : خذ العبارات الخطية لـ u ، v ، h في التمرين 25 أو لـ u ، v ، w في التمرين 26) .

نقول عن جبر لاي F من تماثلات داخلية لـ V إنه **يقبل الحل** إذا وجدت متتالية متزايدة :

$$\{0\} = F_0 \subset F_1 \subset \ldots \subset F_n = F \qquad (*)$$

من الفضاءات الشعاعية الجزئية لـ F بحيث :

$$u \circ v - v \circ u \in F_{i-1} \quad \forall u, v \in F_i \qquad (**)$$

مهما كان i بحيث $1 \leq i \leq n$. نريد البرهان على أنه إذا كان K مغلقاً جبرياً ومميزته 0 (خذ $K = C$ مثلاً) وكان F يقبل الحل ، فإنه يوجد أساس لـ V يجعل مصفوفة كل u من F مثلثية بالنسبة إليه [نظرية لاي ، التي تعمم النتيجة جـ) من التمرين 22 وكذلك التمرين 26 كما نرى ذلك بسهولة] .

أ) برهن على النظرية في حالة $n = 1$ في المتتالية (*) .

ب) اثبت أن الحد F_{n-1} لـ (*) جبر لاي قابل للحل .

جـ) نفرض أن وجدنا شعاعاً $x \neq 0$ في V بحيث تصبح لدينا علاقة من الشكل :

$$u(x) = \lambda(u) \cdot x \quad \forall u \in F_{n-1} \qquad (***)$$

(أي ، أن x شعاع ذاتي مشترك للعناصر u من F_{n-1}) . نأخذ v من F_n ونضع $y = v(x)$. اثبت أن :

$$u(v) = \mu(u)\, v \quad \forall u \in F_{n-1}$$

حيث $\mu(u)$ عدد سلمي المطلوب حسابه. بتعويض v بـ z في النتيجة التي نحصل عليها حيث z عنصر كيفي من k استنتج أن :

$$\mu(u) = \lambda(u), \quad \forall u \in F_{n-1}$$

د) نرمز بـ $V(\lambda)$ للفضاء الجزئي من V المؤلف من العناصر x في V التي تحقق (***) . اثبت أن هذا الفضاء مستقر بواسطة كل u من F_n ، وأن إقتصاري عنصرين كيفيين من F_n على $V(\lambda)$ يتبادلان فيما بينهما (إستعمل التمرين 8 من الفصول 12 ، 13 ، 14) . استنتج أن للعناصر u من F شعاعاً ذاتياً مشتركاً في $V(\lambda)$ ، على الأقل.

س) إختم البرهان بالاستدلال بالتدرج على بعد V (إستعمل التمرين 21) .

ص) إين يتدخل الفرض بأن الحقل K ذو مميزة تساوي 0 ؟

ط) اثبت (بمراعاة الفروض على K المشار إليها) أن نظرية لاي تميز جبور لاي القابلة للحل .

م 28. لكي تكون مصفوفة مربعة X ، معاملاتها في حقل K مغلق جبرياً ، عديمة القوة يلزم ويكفي أن تكون كل قيمها الذاتية في K ، معدومة.

اثبت أنه إذا كانت مميزة K تساوي 0 (مثلاً $K = C$) فإننا نستطيع تعويض هذا الشرط بالعلاقات :

$$Tr(X) = Tr(X^2) = \ldots = Tr(X^n) = 0$$

حيث يرمز n لرتبة X .

لكي تكون مصفوفة ∪ ، معاملاتها في K ، وحيدة القوة (أي لكي يكون $\cup - I$ عديم القوة) يلزم ويكفي أن تكون القيمة الذاتية الوحيدة لـ ∪ هي I . ما هو كثير الحدود المميز لـ ∪ ؟

اثبت أنه إذا كانت مميزة K تساوي $p \neq 0$ ، فإننا نستطيع إستبدال هذا الشرط بالشرط التالي : يوجد صحيح $n \geq 0$ بحيث :

$$U^{p^n} = 1$$

29. لتكن A مصفوفة مربعة قابلة للقلب ، معاملاتها في حقل مغلق جبرياً . اثبت أن القيم الذاتية لمقلوبة A هي مقلوبات القيم الذاتية لِـ A بنفس المضاعفات .

م 30. لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة n ، معاملاتها في حقل تبديلي K . لتكن f كسراً ناطقاً لمتغير واحد ، معاملاته في K ؛ نقول عن A إنه قابل للتعويض في f إذا وجد كثيرا حدود p وَ q بحيث :

$$f = p/q, \quad \text{dét}\,(q(A)) \neq 0$$

اثبت عندئذٍ أن المصفوفة :

$$f(A) = p(A) \cdot q(A)^{-1}$$

مستقلة عن إختيار p وَ q (شريطة أن يحقق p وَ q الشروط المنصوص عليها) . نفرض K مغلقاً جبرياً ونرمز بِـ $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ للقيم الذاتية لِـ A (التي نحسب معها مضاعفاتها) اثبت أنه لكي تكون A قابلة للتعويض في f يلزم ويكفي أن يكون f معرفاً عند كل λ_i ، حينئذٍ تصبح القيم الذاتية لِـ$f(A)$ هي $f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n)$. (إستعمل التمرين 18) .

31. ليكن V فضاء شعاعياً بعده منته على حقل تبيدلي K وَ u تماثلاً داخلياً لِـ V ، وَ W فضاء شعاعياً جزئياً من V مستقراً بواسطة u .اثبت أنه إذا كان u يقبل التأقطر (التثليث ، بالترتيب) فإن الأمر كذلك فيما يخص إقتصار u على W .

م 32. ليكن u وَ v تماثلين داخليين لفضاء شعاعي V بعده منته على حقل تبديلي . نفرض أن u وَ v يقبلان التأقطر ويتبادلان فيما بينهما . اثبت أن $u \circ v$ يقبل التأقطر .

م م 33. ليكن K حقلاً تبديلياً. ولتكن $\cup$ مصفوفة معطاة من $M_n(K)$، نعتبر التطبيق $f_\cup : M_n(K) \to M_n(K)$ المعطى بـ:

$$f_\cup(X) = \cup X - X\cup = [\cup, X] \quad \forall X \in M_n(K)$$

ونعتبر $f_\cup$ كتماثل داخلي للفضاء الشعاعي $M_n(K)$. اثبت أنه لكي يكون $f_\cup$ قابلاً للتأقطر يلزم ويكفي أن يكون $\cup$ كذلك.

34. ليكن K حقلاً تبديلياً وَ n صحيحاً. اثبت أن الحلقة $M_n(K)$ تقبل بصفتها فضاء شعاعياً على K أساساً مشكلاً من مصفوفات X تمتع بالخاصية التالية: من أجل كل مصفوفة قطرية H من $M_n(K)$، لدينا $[H, X] = \alpha(H) \cdot X$ حيث يرمز $\alpha(H)$ لعدد سلمي متعلق بـ H. نطلب حسابه.

م 35. ليكن V فضاء شعاعياً بعده منته، على حقل تبديلي K، نرمز بـ $T_q^p(V)$ للفضاء الشعاعي المؤلف من الوترات المتغايرة p مرة والمتغيرة عكسياً q مرة على V (المثال 6 في ف 21). ليكن u تشاكلاً ذاتياً لـ V، نعتبر التشاكل الذاتي $T_q^p(u)$ لـ $T_q^p(V)$ المعرف في التمرين 1 من ف 21. اثبت أنه إذا كان تماثل داخلي u لـ V يقبل التأقطر فإن التماثل الداخلي $D_q^p(u)$ لـ $T_q^p(V)$ المعرف في التمرين 1 من ف 21 يقبل أيضاً التأقطر. إحسب في كلا الحالتين القيم الذاتية للتماثل الداخلي المعتبر في $T_q^p(V)$، بدلالة القيم الذاتية لـ u.

36. نحتفظ برموز التمرين السابق، ونختار أساساً (a_i) لـ V ونرمز بـ G لزمرة التشاكلات الذاتية لـ V التي لها مصفوفات مثلثية (قطرية، بالترتيب) بالنسبة للأساس المختار. انشئ أساساً للفضاء $T_q^p(V)$ يجعل مصفوفة $T_q^p(u)$ مثلثية (قطرية، بالترتيب)، بالنسبة إليه، وذلك مهما كان u في G.

م 37. ليكن V فضاء شعاعياً بعده منته على حقل تبديلي K وليكن $S_r(V)$ الفضاء الشعاعي المؤلف من التوابع التي تكتب على شكل كثيرات حدود متجانسة درجتها r على V (التمرين 17 من الفصلين 27، 28)؛ نلحق بكل تشاكل ذاتي u لـ V تشاكلاً ذاتياً u_r لـ $S_r(V)$ معطى بـ $u_r(f) = f \circ u$.

اثبت أنه إذا كان u قابلاً للتأقطر (التثليث، الترتيب) فالأمر كذلك فيما يخص u_r، إحسب القيم الذاتية لـ u_r بدلالة القيم الذاتية لـ u.

نفرض أن u يقبل التأقطر: إحسب $Tr(u_3)$ بدلالة معاملات كثير الحدود المميز لـ u. هل شمل النتيجة التي نحصل عليها كل تشاكل ذاتي u لـ V؟ هل توجد دساتير مماثلة لحساب $Tr(u_r)$ مهما كان r؟.

38. برهن على النظرية 4 من الفصل 34 دون إستعمال خاصية القيم الذاتية، التي تتمثل في كون هذه القيم جذوراً لمعادلة جبرية (اكتب علاقة غير تافهة بين $x_1, \ldots, x_n$ وحد عندها u، ثم إستنتج علاقة خطية غير تافهة بين $n-1$ شعاعاً من الأشعة $x_1, \ldots, x_n$).

39. برهن على النظرية 4 من الفصل 34 بإستخدام معين فاندرموند (التمرين 15، ف 24) (اكتب علاقة خطية غير تافهة بين $x_1, \ldots, x_n$ وطبق عليها على التوالي $u, u^2, \ldots, u^{n-1}$).

م 40. لتكن $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n}$ مصفوفة مربعة من الرتبة n، معاملاتها في حلقة K. وليكن H و K جزئين من المجموعة $\{1, 2, \ldots, n\}$، نرمز بـ $A_{H,K}$ للمصفوفة المؤلفة من الحدود a_{ij} لـ A التي لدينا من أجلها $i \in H$ و $j \in K$.

ليكن:

$$(-1)^n p_A(X) = X^n - \tau_1(A) X^{n-1} + \tau_2(A) X^{n-2} - \ldots$$

(الدستور (9)، الفقرة 3، ف 34). اثبت أن المعاملات $\tau_p(A)$ لهذا كثير الحدود، معطاة بالدستور:

$$\tau_p(A) = \sum \det(A_{H,H})$$

حيث نأخذ رمز المجموع على كل الأجزاء H لـ $\{1, 2, \ldots, n\}$ بحيث $\text{Card}(H) = p$.

م م 41. لتكن L حلقة تبديلية و A حلقة جزئية من L؛ نقول عن عنصر x من L أنه صحيح على A إذا حقق معادلة من الشكل:

$$x^n + a_{n-1} x^{n+1} + \ldots + a_0 = 0$$

حيث تنتمي العناصر $a_{n-1}, \ldots, a_0$ إلى A (إن فرض معامل x^n يساوي 1 ، شرط أساسي عندما يكون A ليس حقلاً) . نقول عن عدد عقدي إنه صحيح جبري إذا كان صحيحاً على الحلقة الجزئية **Z** من **C** .

أ) نفرض فيما سبق أن L من صنف منته وذلك بصفته مقياساً على A . لتكن $(m_i)_{1 \leq i \leq r}$ جملة منتهية من مولدات لمقياس L على A . اثبت أنه مهما كان العنصر x من L ، فإنه توجد عناصر a_{ij} من A بحيث :

$$x m_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij} m_j, \ (1 \leq i \leq r)$$

نضع :

$$\begin{vmatrix} a_{11} - x & a_{12} \ldots a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} - x \ldots a_{2r} \\ \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} \ldots a_{rr} - x \end{vmatrix} = d$$

اثبت أن $dm_i = 0$ من أجل $1 \leq i \leq r$ ، يستنتج أن $d = 0$ وأن كل عنصر x من L ، صحيح على A .

ب) نفرض أن الحلقة L لم تعد من صنف منته على A . ولتكن $x_1, \ldots, x_n$ عناصر من L صحيحة على A اثبت أن الحلقة الجزئية $A[x_1, \ldots, x_q]$ مقياس من صنف منته على A .

ج) اثبت أن المجموعة B المؤلفة من العناصر x من L ، الصحيحة على A ، حلقة جزئية من L . (تسمى B المغلق الصحيح لـ A في L) . مثال : تولف الصحيحات الجبرية حلقة جزئية من **C** ، تعود هذه النتيجة إلى ديديكند (كما تعود طريقة الاستدلال أعلاه) .

د) لتكن C حلقة تبديلية و B حلقة جزئية من C ، و A

حلقة جزئية من B . نفرض أن كل عنصر x من C صحيح على B ، وكل عنصر x من B صحيح على A . اثبت أن كل عنصر x من C صحيح على A .

م **42**. إن القيم الذاتية لمصفوفة مربعة معاملاتها صحيحة ناطقة، صحيحات جبرية، بخصوص القضية العكسية، فإن كل صحيح جبري قيمة ذاتية لمصفوفة مربعة معاملاتها في $\mathbf{Z}$.

43. إذا كان عدد ناطق، صحيحاً جبرياً فإنه صحيح ناطق .

م **44**. نعتبر توسيعاً تربيعياً :

$$L = Q[\sqrt{d}]$$

لحقل الأعداد الناطقة، ونفرض أن d صحيح ناطق لا يقبل القسمة على مربع أي عدد أولي (نبيّن بهذه المناسبة أننا نستطيع دوماً إرجاع التوسيعات الجبرية على $\mathbf{Q}$ إلى توسيعات من هذا النوع) .

أ) لكي يكون عنصر $z = x + y\sqrt{d}$ من L صحيحاً على $\mathbf{Z}$، يلزم ويكفي أن يتحقق :

$$2x \in \mathbf{Z};\ x^2 - y^2 d \in \mathbf{Z}$$

(لاحظ أنه إذا كان z صحيحاً جبرياً، فإن الأمر كذلك فيما يخص $\bar{z} = x - y\sqrt{d}$) .

ب) لتكن B حلقة العناصر z من L الصحيحة على $\mathbf{Z}$. اثبت أن L يقبل، بصفته زمرة جمعية، أساساً مؤلفاً من العنصرين :

$1, \sqrt{d}$ إذا كان $d = 2 \pmod 4$ أو $d = 3 \pmod 4$.

$1, \frac{1 + \sqrt{d}}{2}$ إذا كان $d = 1 \pmod 4$

45. اثبت أن كل عدد جبري يساوي نسبة صحيح جبري على صحيح ناطق غير منعدم .

م م **46**. نقول عن حلقة تامة وتبديلية A إنها **مغلقة صحيحاً** إذا كان كل

عنصر من حقل الكسور K لـ A وصحيح على A، ينتمي إلى A؛ مثال: الحلقة $\mathbf{Z}$ (التمرين 43).

أ) نفرض ان A حلقة تقييم (أي أن لدينا $x \in A$ أو $x^{-1} \in A$ مهما كان x في K، راجع التمرين 6، ف 8). اثبت أن A مغلقة صحيحاً.

ب) إذا كان A تقاطع حلقات تقييم من حقل كسوره K فإن A مغلقة صحيحاً [باستطاعتنا البرهان على القضية العكسية]

ج) إن كل حلقة عاملية (التمرين 21، ف 31) مغلقة صحيحاً، والأمر كذلك فيما يخص حلقات ديد كيند (راجع التمرين 14، ف 10، 11 والتمرين 7، ف 18).

د) إذا كانت A مغلقة صحيحاً وكان $\mathcal{P}$ مثالياً أولياً لـ A، فإن الحلقة المحلية $A_{\mathcal{P}}$ [راجع التمرين 9،ر] في الفصل 29: $A_{\mathcal{P}}$ هي مجموعة العناصر x من K التي يمكن أن نكتبها على الشكل u/v حيث u و v في A و $v \notin \mathcal{P}$] مغلقة صحيحاً.

ر) لتكن A حلقة تامة وتبديلية وليكن K حقل كسورها، و L توسيعاً لِـ A؛ عندئذٍ يصبح الغلق الصحيح لـ A في L حلقة مغلقة صحيحاً.

م م 47. لتكن A حلقة مغلقة صحيحاً و K حقل كسورها.

أ) ليكن E توسيعاً مغلقاً جبرياً لـ K و x عنصراً من E صحيحاً على A (إذن فهو جبري على K). ليكن f كثير الحدود الأصغري (التمرينان 9 و 10 من ف 32) لـ x على K. اثبت أن كل جذور f في E صحيحات على A. استنتج أن معاملات f تنتمي إلى A. (للتأكد من أن كل عنصر x جبري على K، صحيح على A، يكفي إذن دراسة معادلته الأصغرية على K).

ب) ليكن L توسيعاً لِـ K، درجته منتهية. اثبت أن لدينا:

$$Tr_{L/K}(x) \in A,\ N_{L/K}(x) \in A$$

مهما كان x في L صحيحاً على A (التمرينان 4 و 5 من ف 26) .

جـ) نفرض في السؤال ب) أن L توسيع قابل للفصل من K (التمرين 4 ، ف 26 ؛ نذكر أن هذه الخاصية متوفرة دوماً عندما تكون المميزة منعدمة) . ليكن $(u_i)_{1 \le i \le n}$ أساساً لِـ L مؤلفاً من عناصر صحيحة على A (اثبت وجود مثل هذه الأسس) وليكن $(v_i)_{1 \le i \le n}$ الأساس المكمل (التمرين 4 ، ف 26) ؛ نعتبر من جهة أخرى الغلق الصحيح B لِـ A في L . اثبت أن مركبات كل عنصر x من B ، بالنسبة للأساس (v_i) ، تنتمي إلى A . استنتج أن المقياس B على A من صنف منته إذا كانت A نوثرية ، وأنه متشاكل مع A^n إذا كانت A رئيسية .

م م 48. ليكن L حقل أعداد جبرية (التمرين 4 ، ف 26) و B حلقة العناصر x من L ، الصحيحة على $\mathbf{Z}$ (نقول عادة أن B **هي حلقة صحيحات** L) .

أ) اثبت أن الزمرة الجمعية B تقبل أساساً من n عنصراً حيث $n = [L : \mathbf{Q}]$ (أي أنه يوجد أساس لِـ L على $\mathbf{Q}$ يمثل في نفس الوقت أساساً للمقياس B على $\mathbf{Z}$) .

ب) اثبت أن العلاقة $I \neq \{0\}$ تستلزم ، من أجل كل مثالي I من B ، $I \cap \mathbf{Z} \neq \{0\}$ (خذ عنصراً x من I وإدرس أول معامل غير منعدم في معادلته الأصغرية على $\mathbf{Q}$) .

إستنتج أن الحلقة B/I منتهية من أجل كل مثالي غير منعدم I من B .

جـ) اثبت أن كل مثالي أولي P غير منعدم ، لِـ B أعظمي وأن B/P حقل منته وأن $P \cap \mathbf{Z} = p\mathbf{Z}$ حيث يرمز p لمميزة B/P .

[تعود هذه النتائج القديمة العهد إلى ديدكيند ، أما نتائج التمرين 47 فهي تعميمات لها نحصل عليها بسهولة . إن خاصية الحقول B/P المتمثلة في كونها منتهية تفسر إلى حد ما أهمية دراسة الحقول المنتهية دراسة شاملة ، خاصة وأننا نستطيع الحصول على كل حقل منته بهذه

الطريقة. نشير إلى أن من أهم النتائج التي توصل اليها ديدكيند والتي حاول قبله غوس و كومار الحصول عليها، هي تلك التي تنص على أن حلقة صحيحات حقل أعداد جبرية، حلقة لديدكيند (ومنها أتى هذا الاصطلاح...) أي أن كل مثالي للحلقة B يكتب بطريقة وحيدة، عندما نهمل التبديلات، على شكل جداء مثاليات أولية. إن الهدف من التمرينين 49 و 50 هو البرهان على هذه النتيجة. سنستعمل فرضاً واحداً على B، وهو أن يكون نوثرياً [وهذا بديهي حسب السؤال أ) في التمرين 48] ومغلقاً صحيحاً [وهذا بديهي حسب السؤال ر) من التمرين 46]؛ كل مثالي أولي وغير منعدم فيه، أعظمي].

م م م 49. لتكن A حلقة تامة تبديلية و K حقل كسورها. سنستعمل فيما يلي مفهوم المثالي الكسري لـ A المعرف في التمرين 14، ف 10.

أ) نقول عن مثالي كسري I من A إنه **قاسمي** إذا كان يساوي تقاطع المثاليات الكسرية الرئيسية (أي ذات الشكل xA حيث $x \in K$ و $x \neq 0$) التي تحتويه. اثبت أنه إذا كان I و J قاسميين فإن الأمر كذلك فيما يخص $(J : I)$.

اثبت أن كل عنصر x من $(I : I)$ صحيح على A عندما تكون A نوثرية، وإستنتج أن:

$$(I : I) = A$$

عندما تكون A نوثرية ومغلقة صحيحاً.

ب) نفرض أن A نوثرياً. اثبت أنه يوجد على الأقل مثالي أولي غير منعدم لـ A، قاسمي (إعتبر مجموعة المثاليات القاسمية I بحيث $I \subset A$ و $I \neq A$ ثم خذ فيها عنصراً أعظمياً).

ج) نفرض الآن بأن A حلقة محلية(*) نوثرية مغلقة صحيحاً

(*) نقول عن حلقة A إنها محلية إذا كانت تبديلية وكانت مجموعة العناصر غير القابلة للقلب تساوي مثالياً $\mathfrak{m}$ لـ A. عندئذٍ يكون هذا المثالي هو المثالي الأعظمي الوحيد لـ A. وإذا كانت A تامة فإن الحلقة الجزئية $A_\mathfrak{m}$ من حقل كسور A تساوي A نفسها. بخصوص القضية العكسية، إذا كانت A

وبأن المثالي الأولي غير المنعدم الوحيد في A هو المثالي الأعظمي الوحيد $\mathcal{P}$ لِـ A، إن كل حلقة تقييم متفرق (التمرين 6، ف 8) تتحقق هذه الشروط؛ نريد الآن البرهان على القضية العكسية.

اثبت أن $\mathcal{P}$ قاسمي وإستنتج من ذلك أن:

$$(A : \mathcal{P}) \neq A$$

اثبت أن لدينا إحدى العلاقتين التاليتين مهما كان x في $(A : \mathcal{P})$:

$$x\mathcal{P} = \mathcal{P} \ , \quad x\mathcal{P} = A$$

إستنتج أن:

$$(A : \mathcal{P}) \cdot \mathcal{P} = A$$

وبالتالي، أن المثالي $\mathcal{P}$ قابل للقلب.

د) اثبت أن $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}^2$ وَ $\mathcal{P} = Ax$ مهما كان x في $\mathcal{P}$ بحيث x لا ينتمي إلى $\mathcal{P}^2$.

ر) اثبت أنه مهما كان المثالي A للحلقة A فإنه يوجد صحيح n بحيث يصبح A محتوياً في $\mathcal{P}^n$ ولا يحتويه $\mathcal{P}^{n+1}$. بإستعمال خاصية $\mathcal{P}$ المتمثلة في كونه يقبل القلب، اثبت أن $A = \mathcal{P}^n$ وإستنتج أن الحلقة A رئيسية.

س) برهن على أن A حلقة تقييم متفرق.

م م م 50. لتكن A حلقة تامة تبديلية، نرمز بِـ K لحقل كسورها. نفرض أن A نوثرية ومغلقة صحيحاً، وأن كل مثالي أولي غير منعدم لِـ A، أعظمي؛ نريد البرهان على أن A حلقة ديدكيند أي أن كل مثالي كسري لِـ A، يقبل القلب.

حلقة تامة وكان $\mathcal{P}$ مثالياً أولياً لِـ A، فإن الحلقة $A_\mathcal{P}$ حلقة محلية. تساعد الحلقات المحلية على وجه الخصوص، في دراسة خاصيات منوعة جبرية «بجوار» نقطة معطاة وهو ما يفسر سبب إختيار المصطلح المخصص لها.

أ) ليكن $\mathfrak{p}$ مثالياً أولياً غير منعدم لِـ A ؛ اثبت ، مستعيناً بالتمرين السابق أن الحلقة المحلية $A_{\mathfrak{p}}$ حلقة تقييم متفرق لِـ K .
نرمز بِـ $v_{\mathfrak{p}}$ لهذا التقييم الذي نختاره بحيث :

$$v_{\mathfrak{p}}(K^*) = \mathbf{Z}$$

اثبت أن عناصر A معرفة بالمتراجحة :

$$v_{\mathfrak{p}}(x) \geq 0$$

مهما كان المثالي الأولي غير المنعدم $\mathfrak{p}$ لِـ A .

ب) اثبت أنه مهما كان العنصر x غير المنعدم من K فإن المثاليات $\mathfrak{p}$ التي تحقق $v_{\mathfrak{p}}(x) \neq 0$ ، عددها منته (ارجع إلى الحالة التي يكون فيها x في A) . اثبت أنه إذا كانت $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}_1, ..., \mathfrak{p}_r$ مثاليات أولية معطاة في A ، ومختلفة مثنى مثنى وعددها منته ، وكانت $n_1, ..., n_r$ أعداداً صحيحة معطاة ، فإنه يوجد عنصر x في A يحقق العلاقات :

$$v_{\mathfrak{p}}(x) = 0 \ ; \quad v_{\mathfrak{p}_i}(x) \geq n_i \quad (1 \leq i \leq r)$$

ج) اثبت أنه مهما كان المثالي الأولي غير المنعدم $\mathfrak{p}$ لِـ A فإنه يوجد عنصر x من K بحيث :

$$v_{\mathfrak{p}}(x) = -1 \ , \quad v_q(x) \geq 0 \quad \forall q \neq \mathfrak{p}$$

(إختر عنصراً x_0 يحقق $v_{\mathfrak{p}}(x_0) = -1$ وضع $x = x_0 y$ ثم عيّن y مستعيناً بالسؤال السابق) .

د) اثبت أن كل مثالي أولي غير منعدم في A يقبل القلب ، ثم بين أن A حلقة ديدكند (التمرين 7 ، ف 18) .

ر) لتكن A حلقة ديدكند و L توسيعاً قابلاً للفصل ، درجته منتهية ، لحقل كسور A ، وليكن B الغلق الصحيح لِـ A في L . اثبت أن B حلقة ديدكند . [إذا طبقنا هذه الطريقة على $A = k[K]$ حيث k حقل تبديلي ، فإنها تقودنا إلى أمثلة لحلقات ديدكند تخالف تلك التي نجدها في نظرية الصحيحات الجبرية] .

س) اثبت أن الحلقة $\mathbf{Z}[\sqrt{-5}]$ حلقة ديدكند، وأن المثالي المولود في هذه الحلقة عن 3 و $2\sqrt{-5}+1$ أولي وغير رئيسي.

ص) ليكن k حقلاً تبديلياً مغلقاً جبرياً. نضع $A = k[X]$ (حيث X متغير على k)، و $K = k(X)$، وَ:

$$L = K\left[\sqrt{X^3 + pX + q}\right]$$

حيث p و q عنصران معطيان من k (بحيث أن L توسيع تربيعي لِـ K، يوافق «المنحنى من الدرجة الثالثة» المعرف بالمعادلة:

$$\left(y^2 = x^3 + px + q\right.$$

أوجد الغلق الصحيح B لِـ A في L. ليكن c عنصراً معطى من k، و $\mathfrak{p}$ المثالي الأولي (والأعظمي) من A المؤلف من العناصر f من A بحيث $f(c) = 0$؛ ما هي الحالة التي يكون فيها $\mathfrak{p}B$ المولد عن $\mathfrak{p}$ في B، أولياً؟ إذا لم يكن $\mathfrak{p}B$ أولياً، كيف يمكن كتابته على شكل جداء لعوامل أولية؟

م م م 51. (برهان آخر لنولستالانساتز هيلبرت، يستعمل التمرين 41). ليكن K حقلاً تبديلياً غير منته، ولتكن:

$$L = K[x_1, \ldots, x_n]$$

حلقة تامة تبديلية، تحتوي K ومولدة عن K وعدد منته من العناصر $x_1, \ldots, x_n$.

أ) نفرض وجود علاقة جبرية:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

بين العناصر x_i حيث f كثير حدود غير منعدم لِـ n متغيراً، معاملاته في K، ودرجته الكلية r. ليكن f_r الجزء المتجانس من f الذي درجته الكلية تساوي r. لتكن $Z_1, \ldots, Z_{n-1}, Y$ متغيرات على K معطاة وعناصر $c_1, \ldots, c_{n-1}$ من K معطاة، نضع:

$$f(Z_1 + c_1 Y, \ldots, Z_{n-1} + c_{n-1} Y, Y) = \sum_{0 \le k \le r} p_k(Z_1, \ldots, Z_{n-1}) Y^k$$

اثبت أن كثير الحدود p_r معطى بـ :

$$p_r(Z_1, \ldots, Z_{n-1}) = f_r(c_1, \ldots, c_{n-1}, 1)$$

وبالتالي فهو ثابت . اثبت أنه توجد عناصر $c_1, \ldots, c_{n-1}$ تنتمي إلى K بحيث :

$$f_r(c_1, \ldots, c_{n-1}, 1) \neq 0$$

(إستخدم تجانس f_r والنظرية 1 من ف 28) . نختار العناصر c_i بتلك الطريقة ونضع :

$$z_i = x_i + C_i x_n \quad (1 \le i \le n-1)$$

اثبت أن : $L = K[z_1, \ldots, z_{n-1}, x_n]$ وأن x_n صحيح على الحلقة الجزئية $K[z_1, \ldots, z_{n-1}]$ من L .

ب) إستنتج من ذلك النتيجة التالية («توطئة التجانس» لإيمي نوثر ، وهي صالحة أيضاً عندما يكون K منتهياً ، لكن البرهان عندئذٍ يزداد صعوبة) : إذا كانت $L = K[x_1, \ldots, x_n]$ حلقة تامة ذات توليد منته على الحقل K وكانت العناصر x من L ليست كلها جبرية على K ، يوجد $d(n \ge d)$ عنصراً $z_1, \ldots, z_d$ من L تتمتع بالخاصيات التالية : (1) العناصر z_j عبارات خطية للعناصر x_i ، معاملاتها في K ، (2) $z_1, \ldots, z_d$ مستقلة جبرياً على K ؛ (3) كل عنصر من L ، صحيح على الحلقة الجزئية $K[z_1, \ldots, z_d]$ من L .

ج) أثبت أنه إذا كانت العناصر x من L ليست كلها جبرية على K ، فإن الحلقة L لا يمكن أن تكون حقلاً (اكتب بأن مقلوب z_d في L صحيح على الحلقة الجزئية $K[z_1, \ldots, z_d]$ واستخلص من ذلك تناقضاً) . بعبارة أخرى : إذا كانت حلقة L ذات توليد منته على حقل تبديلي K ، حقل ، فإن L توسيع جبري (درجته منتهية حتماً) لِـ K ، وبصفة خاصة لدينا $L = K$ عندما يكون K مغلقاً جبرياً (ومنه يأتي النولستالانساتز راجع التمرين 33 ، ر) في الفصل 33) .

أكتب المصفوفات التالية على شكل جوردان (إحسب في كل حالة تغيير الأساس الذي يسمح بالرجوع إلى شكل جوردان) :

.1 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ، .2 $\begin{pmatrix} 12 & -6 & -2 \\ 18 & -9 & -3 \\ 18 & -9 & -3 \end{pmatrix}$

.3 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$ ، .4 $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

.5 $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$ ، .6 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \dots n \\ 0 & n & n-1 \dots 2 \\ n & n-1 & n-2 \dots 1 \end{pmatrix}$

م 7. أثبت أنه إذا كانت :

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 \dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 & a \end{pmatrix}$$

مصفوفة جوردان من الرتبة n وإذا كان $f(X)$ كثير حدود لمتغير واحد ، فإن :

$$f(A) = \begin{pmatrix} f(a) & f_1(a) & f_2(a) & \dots & f_{n-1}(a) \\ 0 & f(a) & f_1(a) & \dots & f_{n-2}(a) \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(a) \end{pmatrix}$$

حيث نضع :

$$f_k(a) = f^{(k)}(a)/k!$$

وذلك بفرض أن تكون مميزة حقل الأساس تساوي 0 ، ماذا يحدث لو كانت المميزة p غير منعدمة .

8. لتكن A مصفوفة مربعة معاملاتها في حقل تبديلي K . بين دون استعمال نظرية هاميلتون-كايلي أنه توجد كثيرات حدود غير ثابتة f تنتمي إلى $K[X]$ بحيث $f(A) = 0$. أثبت أنها مضاعفات كثير الحدود (من بين كثيرات الحدود تلك) الذي له أصغر درجة ممكنة ، وأن كثير الحدود هذا وحيد إذا فرضنا على معامله الأساسي أن يكون مساوياً لـ 1 . نقول عندئذٍ أنه **كثير الحدود الأصغري** لـ A على K ، وهو يقسم كثير الحدود المميز لـ A وبالتالي فدرجته أقل من رتبة A أو تساويها .

أثبت أنه إذا كانت A هي مصفوفة جوردان الواردة في التمرين السابق ، فإن كثير الحدود الأصغري لـ A هو :

$$(X - a)^n$$

أثبت أنه إذا كانت :

$$A = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & A'' \end{pmatrix}$$

فإن كثير الحدود الأصغري لـ A هو أصغر مضاعف مشترك لكثيري الحدود الأصغرين لـ A' و A'' .

أثبت أن كل مصفوفتين متشابهتين A و PAP^{-1} يقبلان دوماً نفس كثير الحدود الأصغري .

نفرض أن K مغلق جبرياً ، إستنتج ، بإستعمال نظرية جوردان والنتائج السابقة ، حساب كثير الحدود الأصغري لمصفوفة مربعة كيفية .

طبق الطريقة هذه على المصفوفات الواردة في التمارين من 1 إلى 6 أعلاه .

9. ليكن L حقلاً تبديلياً وَ K حقلاً جزئياً من L و A مصفوفة مربعة معاملاتها في K . هل يتساوى كثير الحدود الأصغري لِـ A على K وكثير الحدود الأصغري لِـ A على L ؟ .

م م 10. ليكن k حقلاً تبديلياً و V فضاء شعاعياً بعده منته على k وَ u تماثلاً داخلياً لِـ V ، نعتبر حلقة كثيرات الحدود $K = k[X]$ والمقياس $V(X)$ على K المعرف في التمرين 19 من الفصلين 27 ، وأخيراً المقياس V_u على K الوارد في التمرين 20 من الفصلين 27 وَ 28 ؛ نعتبر أيضاً عنصراً x من V و f من K ونرمز بِـ :

$$f \cdot x = f(u)(x)$$

لجداء x بِـ f في المقياس V_u ؛ نرمز من جهة أخرى بِـ $\bar{u}$ للتماثل الداخلي للمقياس $V[X]$ على K المعطى بِـ :

$$\bar{u}(m_0 + m_1 X + \dots) = u(m_0) + u(m_1) X + \dots$$

مهما كانت العناصر m_i في V المنعدمة عداً عدداً منتهياً منها .

أ) نعتبر التطبيق :

$$\theta : V[X] \rightarrow V_u$$

المعطى بِـ :

$$\theta(m_0 + m_1 X + m_2 X^2 + \dots) = m_0 + u(m_1) + u^2(m_2) + \dots$$

أثبت أنه تمثال مقاييس على K وأن θ غامر .

ب) أثبت أن النواة θ تساوي صورة التمثال الداخلي :

$$\bar{u} - X \cdot j$$

لِـ$V[X]$ (حيث يرمز j للتطبيق المطابق من $V[X]$ في نفسه ؛ إذن فـ $j \cdot X$ هو التحاكي المعرف بنسبة X في هذا المقياس على $k[X]$) .

جـ) لتكن $A = (a_{ij})_{1 \le i,j \le n}$ مصفوفة u بالنسبة لأساس لِـ V على k ؛ نعتبر المصفوفة :

$$A - X \cdot 1_n = \begin{pmatrix} a_{11} - X & a_{21} & \dots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} - X & \dots a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots a_{nn} - X \end{pmatrix}$$

التي تنتمي معاملاتها إلى الحلقة K ؛ أثبت ، بالإستعانة بالتمرين 15 من ف 32 ، أنه توجد مصفوفتان P و Q في $GL(n, k)$ بحيث :

$$P(A - X \cdot 1_n)Q = \begin{pmatrix} d_1(X) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2(X) & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n(X) \end{pmatrix}$$

حيث ترمز $d_1, \dots, d_n$ لـكثيرات حدود غير منعدمة بحيث يقسم كل منها العنصر الذي يليه (من اليسار إلى اليمين) (علينا أن ننبه إلى كون : معاملات P و Q تتعلق عموماً بِـ x) . أثبت أنه من أجل كل i ، يكون كثير الحدود $d_1 \dots d_i$ واحداً من أكبر القواسم المشتركة للأصغريات من الرتبة i لِـ $A - X \cdot 1_n$. نفرض فيما يلي أن المعامل الأساسي لكل d_i يساوي 1 .

د) بالاستعانة بالسؤال ب) وبالتمرين 15 من ف 32 ، أثبت أن المقياس V_u على K متشاكل مع الجداء المباشر للمقاييس $K/d_i K$.

نفرض :

$$d_1 = \dots = d_s = 1$$

وأن d_{s+1} غير ثابت ؛ نضع :

$$d_i(X) = X^{n_i} = a_{i,n_i - 1} X^{n_i - 1} - \dots - a_{i,0}$$

من أجل $s+1 \le i \le n$ ؛ أخيراً نعتبر المصفوفات :

$$A_i = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \ldots a_{i,0} \\ 1 & 0 & 0 \ldots a_{i,1} \\ 0 & 1 & 0 \ldots a_{i,2} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 \ldots a_{i,n_i-1} \end{pmatrix}$$

أثبت أنه يوجد أساس لِـV على k بحيث تكون مصفوفة u بالنسبة لهذا الأساس هي :

$$\begin{pmatrix} A_{s+1} & 0 & \ldots 0 \\ 0 & A_{s+2} & \ldots 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots A_n \end{pmatrix}$$

أثبت أن d_n هو كثير الحدود الأصغري لِـu .

ر) نقول عن $d_1(X), \ldots, d_n(x)$ إنها **لا متغيرات التشابه** لِـu (أو لمصفوفة A لِـu بالنسبة لأساس كيفي لِـV على k) . أثبت أنه لكي يكون تماثلان داخليان u و v لِـV متشابهين (أي لكي يوجد تشاكل ذاتي w لِـV بحيث $v = w \circ v \circ w^{-1}$) يلزم ويكفي أن تكون لهما نفس لا متغيرات التشابه ، [لاحظ أنه عندما يكون u و v متشابهين وتكون A وَ B مصفوفتيهما بالنسبة لأساس كيفي لِـV ، فإن المصفوفتين $A - X \cdot 1_n$ وَ $B - X \cdot 1_n$ متكافئتان على الحلقة $K = k[X]$ ، ثم طبق التمرين 15 ، ر) ف 32) ، أو إستخدم نهاية السؤال ج) أعلاه] . أو : لتكن A وَ B مصفوفتين مربعتين من الرتبة n ، معاملاتها في حقل تبديلي كيفي k ؛ لكي توجد مصفوفة U من $GL(n, k)$ بحيث :

$$B = U A U^{-1}$$

يلزم ويكفي من أجل $1 \le i \le n$ أن يكون أكبر قاسم مشترك للأصغريات من الرتبة i للمصفوفة $A - X \cdot 1_n$ مساوياً لأكبر قاسم مشترك للأصغريات من الرتبة i للمصفوفة $B - X \cdot 1_n$.

(نتيجة مباشرة : كل مصفوفة A من $M_n(k)$ متشابهة حتماً مع منقولتها ^tA) .

م 11. إثبت أن المصفوفتين :

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{pmatrix}$$

متشابهتان وذلك بحساب لا متغيرات التشابه لكل واحدة منهما.
نفس السؤال فيما يخص المصفوفتين :

$$\begin{pmatrix} 4 & 10 & -19 & 4 \\ 1 & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 41 & -4 & -26 & -7 \\ 14 & -13 & -91 & -18 \\ 40 & -4 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

م م 12. ليكن L حقلاً تبديلياً و K حقلاً جزئياً من L ولتكن A وَ B مصفوفتين مربعين من الرتبة n ، معاملاتها في K. نفرض A و B متشبهتين بصفتهما مصفوفتين ذات معاملات في L ؛ أثبت أن A و B متشابهتين بصفتهما ذات معاملات في K (إستعمل التمرين 10) ، ما هي علاقة هذا التمرين بالتمرين 22 من ف 27؟

م م 13. لتكن A مصفوفة مربعة من الرتبة n ذات معاملات في حقل تبديلي K ؛ نفرض أن كثير الحدود المميز لِـ A له كل جذوره في K (أي أن A يقبل التثليث على K) . أثبت وجود جدول قطري من مصفوفات جوردان ، لا متغيرات التشابه فيها متساوية للامتغيرات التشابه في A . إستنتج من ذلك ومن السؤال ر) الوارد في التمرين 10 ، برهاناً جديداً لنظرية جوردان .

م 14. لتكن A مصفوفة مربعة قابلة للقلب من الرتبة n ، معاملاتها في حقل مغلق جبرياً في K . أثبت أنه توجد في $GL(n, K)$ مصفوفة قابلة للتأقطر D ومصفوفة وحيدة القوة U بحيث :

$$A = DU = UD$$

وأن D و U وحيدتان (ارجع إلى مصفوفة لجوردان) . نقول عن D

و U إنما المركبتان النصف بسيطة والوحيدة القوة لـ A [نستطيع البرهان، إذا كانت مميزة K تساوي 0 مثلاً أو منتهية، دون الفرض بأن K مغلق جبرياً، على أن D و U ذات معاملات في K مع العلم أننا نحسب D و U في توسيع مغلق جبرياً لـ K ؛ إذا أخذنا $K = \mathbf{R}$ مثلاً فمن الواضح أنه إذا كانت D و U من $M_n(\mathbf{C})$ ملائمتين فالأمر يصبح كذلك فيما يخص المصفوفتين الخياليتين المرافقتين. ونظراً لوحدانية D و U نرى أن لدينا D و U في $M_n(\mathbf{R})$ في هذه الحالة. من الواضح أنه إذا لم يكن K مغلقاً جبرياً فإن D نصف بسيطة لكنها لا تقبل حتماً التأقطر على K].

م 15. لتكن X في $M_n(K)$ حيث K مغلق جبرياً. إثبت وجود مصفوفة قابلة للتأقطر D ومصفوفة عديمة القوة N بحيث:

$$X = D + N, \quad D \cdot N = N \cdot D$$

وأن هذين المصفوفتين معينتان تماماً بهذين الشرطين. نأخذ $K = \mathbf{C}$ ونفرض أن معاملات X حقيقية؛ إثبت أن الأمر كذلك فيما يخص معاملات D و N. (نستطيع هنا، مثلما حدث في التمرين السابق، البرهان على أنه إذا كانت معاملات X في حقل جزئي مميزته 0 أو في حقل جزئي منته. فالأمر كذلك فيما يخص معاملات D و N).

م 16. نرمز بـ E لمجموعة كافة التطبيقات(*):

$$f: \mathbf{N} \to \mathbf{C}$$

التي تحقق العلاقة:

$$(*) \quad f(n+p) = a_{p-1} f(n+p-1) + \dots + a_0 f(n) \ \forall n \in \mathbf{N}$$

حيث $a_0, \dots, a_{p-1}$ أعداد عقدية معطاة.

أ) اثبت أنه يوجد تطبيق وحيد في E يجعل الأعداد

(*) إن هذه «التطبيقات» ما هي سوى «المتتاليات» العقدية لكنه يستحسن أن ننظر إليها هنا على أنها توابع.

$f(0), \ldots, f(p-1)$ تأخذ قيماً معطاة (لا نطلب حساب f صراحة).
إستنتج أن E فضاء جزئي شعاعي بعده p، من فضاء كافة التطبيقات من **N** في **C**.

ب) من أجل $0 \leq i \leq p-1$، نرمز بـ e_i للعنصر الوحيد من E بحيث :

$$e_i(j) = \begin{cases} 0 & j \neq i \\ 1 & j = i \end{cases} \qquad ; 0 \leq j \leq p-1$$

اثبت أن $e_0, \ldots, e_{p-1}$ تؤلف أساساً لـ E.

جـ) اثبت أنه يوجد تماثل داخلي u لـ E وحيد بحيث، من أجل كل f في E، يكون التابع $g = u(f)$ معطى بـ :

$$g(n) = f(n+1)$$

إحسب مصفوفة u بالنسبة للأساس $e_0, \ldots, e_{p-1}$ لـ E، وتحقق أن كثير الحدود المميز لـ u يساوي، عند إهمال الإشارة :

$$X^p - a_{p-1} X^{p-1} - \ldots - a_0$$

د) اثبت أنه من أجل كل صحيح $r \geq 0$ وكل λ في **C**، فإن الفضاء الجزئي :

$$\text{Ker}\,[(u - \lambda)^r]$$

من E مؤلف من العناصر f من E التي تكتب على الشكل

$$f(n) = \lambda^n \, g(n)$$

حيث يكتب التابع g على شكل كثير حدود من الدرجة $r-1$ على الأكثر.

ر) لتكن $\lambda_1, \ldots, \lambda_h$ مختلف جذور المعادلة :

$$\lambda^p - a_{p-1} \lambda^{p-1} - \ldots - a_0 = 0$$

ونرمز بـ $r_1, \ldots, r_h$ لرتب مضاعفات هذه الجذور. اثبت أنه لكي يكون تطبيق f من **N** في **C** منتمياً إلى E، أي لكي يحقق علاقة

التدريج (*) يلزم ويكفي أن توجد كثيرات حدود : $g_1, \ldots, g_h$ في $C[X]$ تحقق :

$$d^\circ(g_1) < r_1, \ldots, d^\circ(g_h) < r_h$$

وبحيث :

$$f(n) = g_1(n)\lambda_1^n + \ldots + g_h(n)\lambda_h^n \quad \forall n \in \mathbf{N}$$

إذا كان الأمر كذلك فإن كثيرات الحدود $g_1, \ldots, g_h$ معينة تماماً بـ f .

س) أوجد كل المتتاليات $(u_n)_{n \geq 0}$ المؤلفة من الأعداد العقدية بحيث :

$$u_{n+5} = u_{n+4} + 5u_{n+3} - u_{n+2} - 8u_{n+1} - 4u_n$$

مهما كان $0 \leq n$.

م 17. لتكن $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq p}$ مصفوفة مربعة من الرتبة p ، معاملاتها عقدية . أوجد كافة التطبيقات :

$$f = (f_1, \ldots, f_p) : \mathbf{N} \to \mathbf{C}^p$$

التي تحقق :

$$f_i(n+1) = \sum_{j=1}^{j=p} a_{ij} f_j(n)$$

من أجل $1 \leq i \leq p$ وكل n في $\mathbf{N}$ (اكتب A على شكل مصفوفة جوردان) .

استعمل النتائج التي نحصل عليها ، لنجد من جديد نتائج التمرين السابق ، وذلك بإلحاق كل حل للعلاقة (*) بالتابع :

$$\big(f(n), f(n+1), \ldots, f(n+p-1)\big)$$

الذي تنتمي قيمه إلى $\mathbf{C}^p$.

م 18. أوجد كل التطبيقات (f_1, f_2, f_3, f_4) من $\mathbf{N}$ في $\mathbf{C}^4$ تحقق العلاقات التالية :

$$f_1(n+1) = -5f_1(n) - 3f_2(n) - 2f_3(n) + 4f_4(n)$$

$$f_2(n+1) = 2f_1(n) + f_3(n) - f_4(n)$$

$$f_3(n+1) = 10f_1(n) + 7f_2(n) + 4f_3(n) - 9f_4(n)$$

$$f_4(n+1) = 2f_1(n) + f_3(n)$$

إستعمل التمرين السابق) .

م 19. ليكن K حقلاً مغلقاً جبرياً، مميزته 0، نعتبر في هذا التمرين(*) سلاسل شكلية لمتغير واحد، معاملاتها في K (التمرين 11، الفصلين 27، 28) .

أ) لتكن السلسلة الشكلية المعطاة :

$$x = \sum_{n \in N} f(n)\, T^n / n!$$

للمتغير T، معاملاتها في K (بحيث f تطبيق من المجموعة N في K) . مشتق x هو، تعريفاً، السلسلة الشكلية :

$$x' = \sum_{n \in N} f(n+1)\, T^n / n!$$

اثبت أن التطبيق $x \to x'$ إشتقاق لحلقة $K[[T]]$. نرمز فيما يلي بـ :

$$x'' = (x')',\ x''' = (x'')',\ \ldots,\ x^{(r)} = (x^{r-1})',\ \ldots$$

للمشتقات المتوالية لـ x .

ب) لتكن $a_0, \ldots, a_{p-1}$ من K ثوابت معطاة، إثبت أن البحث عن السلاسل الشكلية :

(*) إن الهدف من هذا التمرين ومن التي تليه هو توضيح الرابطة الموجودة بين نظرية تبسيط المصفوفات ونظرية جمل المعادلات التفاضلية . ونظراً لأهمية هذا الموضوع من الطبيعي أنه يستحق دراسة أكثر عمقاً وشمولاً ؛ إلا أن هذا النوع من الدراسة يدخل في إطار دروس التحليل على الخير . إن إدخال السلاسل الشكلية في هذه النظرية أمر مطابق للأصول ذلك لأن طريقة كوشي - كوفالوسكا لإثبات وحدانية الحلول فيما يخص جمل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات التحليلية تنحصر في البداية على إنشاء سلاسل صحيحة تحقق «شكلياً» المعادلات المعطاة (أي أن نضع أنفسنا في إطار السلاسل الشكلية، متقاربة كانت أو متباعدة، كما فعلنا هنا) ثم البرهان بواسطة مراجحات متعلقة بمعاملات هذه السلاسل، على إنها (أي السلاسل الشكلية) متقاربة . في حالة الجمل المدروسة هنا، فإن براهين التقارب (لما $K = C$) تافهة نظراً لبساطة شكل السلاسل التي نحصل عليها .

$$x = \sum_{n \in N} f(n) T^n / n!$$

التي تحقق المعادلة التفاضلية الخطية والمتجانسة، وذات المعاملات الثابتة :

$$x^{(p)} = a_{p-1} x^{(p-1)} + \dots + a_0 x \qquad (**)$$

تعود إلى حل المعادلة (*) الواردة في التمرين 16 .

جـ) من أجل λ في K ، نعتبر السلسلة الشكلية :

$$\exp(\lambda T) = \sum_{n \in \mathbf{N}} \lambda^n T^n / n!$$

(المستوحاة من نشر التابع الأسي المعروف، حسب سلسلة صحيحة) . لتكن :

$$x = \sum f(n) T^n / n!$$

سلسلة شكلية معطاة . إثبت تكافؤ الخاصيتين التاليتين :

(1) لدينا $f(n) = g(n)\lambda^n$ حيث يرمز g لتابع يكتب على شكل كثير حدود على $\mathbf{N}$، معاملاته في K ، ودرجته r ؛ (2) السلسلة الشكلية x جداء للسلسلة $\exp(\lambda T)$ وكثير حدود لـT درجته T ، معاملاته في K . (قد يكون من المفيد إستخدام التمرين 8 من الفصلين 27 ، 28) .

د) لتكن $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ جذور المعادلة :

$$\lambda^p = a_{p-1} \lambda^{p-1} + \dots + a_0$$

في K ولتكن $r_1, \dots, r_h$ رتب مضاعفات هذه الجذور . اثبت أن الحل العام للمعادلة التفاضلية (**) هو :

$$x = g_1(T) \exp(\lambda_1 T) + \dots + g_h(T) \exp(\lambda_h T)$$

حيث يرمز كل g_i لكثير حدود درجته $r_i - 1$ على الأكثر، معاملاته في K .

ر) نفرض $K = \mathbf{C}$. ماذا تبقى حتى نستنتج من النتائج السابقة

النظرية المعروفة للمعادلات التفاضلية الخطية والمتجانسة ذات المعاملات الثابتة؟

س) نبحث الآن عن p سلسلة شكلية :

$$x_i = \sum f_i(n)\, T^n / n!$$

تحقق الجملة :

$$x'_i = \sum_{j=1}^{j=p} a_{ij}\, x_j$$

حيث تنتمي العناصر a_{ij} المعطاة إلى K . إثبت أن حل هذه المسألة يعود إلى حل التمرين 17 ، ثم فسر نتائج التمرين 17 بلغة نظرية حل المعادلات التفاضلية.

نطلب في التمارين الموالية حل الجمل التفاضلية المعطاة باستعمال التمرين 19 ، س) :

.20
$$\begin{aligned} x' &= 5x - 3y + 2z \\ y' &= 6x - 4y + 4z \\ z' &= 4x - 4y + 5z \end{aligned}$$

.21
$$\begin{aligned} x' &= 7x - 12y + 6z \\ y' &= 10x - 19y + 10z \\ z' &= 12x - 24y + 13z \end{aligned}$$

.22
$$\begin{aligned} x' &= x - 3y + 3z \\ y' &= -2x - 6y + 13z \\ z' &= -x - 4y + 8z \end{aligned}$$

.23
$$\begin{aligned} x' &= 3x - y \\ y' &= x + y \\ z' &= 3x + 5z - 3u \\ u' &= 4x - y + 3z - u \end{aligned}$$

24. كامل المعادلة التفاضلية :

$$x^{(5)} - x^{(4)} - 5x^{(3)} + x'' + 8x' + 4x = 0$$

25. إستعمل التمرين 16 للبرهان على المتطابقة :

$$\sum_{p=1}^{p=n} p^2 a^p = \frac{a(a+1)}{(1-a)^3} + \frac{(a-7)n - (2a^2 - 5a + 1)n^2}{2(1-a)^3} a^{n+1}$$

(نفرض $a \neq 1$) .

26. ليكن K حقلاً تبديلياً و n صحيحاً موجباً . نرمز بـV للفضاء الشعاعي (على K) المؤلف من كثيرات الحدود لمتغير واحد ، ذات المعاملات في K ، والتي درجاتها أقل من n أو تساويها . ما هو بعد V على K؟ نرمز بـD للتطبيق من V في V الذي يحوّل كل كثير حدود إلى كثير الحدود المشتق . اثبت أن D تماثل داخلي عديم القوة لِـV ، ثم أوجد أساساً لِـV على K يجعل مصفوفة D تأخذ شكل جوردان بالنسبة إليه .

(تتعلق التمارين من 1 إلى 21 بخاصيات صالحة على حقل أساس K كيفي، إلا أنه ينبغي على القارئ أن يستثني أحياناً الحقول التي لها مميزة تساوي 2، خاصة وأننا لم نشر صراحة إلى ذلك في النصوص المعنية بهذا الإستثناء. أما التمارين من 22 إلى 51 فتفرض أن حقل الأساس هو $\mathbf{R}$ أو $\mathbf{C}$ وَقد أشرنا إلى ذلك في النص. هذا، ومن الواضح أن النصوص المتعلقة بحقل أساس كيفي، وخاصة التمارين 2,1 ومن 9 إلى 21، تظل قائمة ومفيدة عندما يكون K مساوياً لِـ$\mathbf{R}$ أو $\mathbf{C}$.)

1. ليكن V فضاء شعاعياً بُعده منته، على حلقة تبديلية K؛ نُعرّف **شكلاً تربيعياً** على V بأنه تابع يُكتب على شكل كثير حدود مُتجانس من الدرجة 2، على V (التمرين 17، الفصلان 27، 28)؛ أي أنه تطبيق q من V في K مُعطى بعلاقة من الشكل:

$$q(x) = \sum a_{ij}\, x_i\, x_j$$

حيث ترمز العناصر a_{ij} لعناصر مُعطاة في K وحيث تُمثل العناصر x_i المنتمية لِـK إلى إحداثيات الشُعاع x من V بالنسبة لأساس لِـV.

أ) اثبت أنه إذا كان $f(x, y)$ شكلاً ثنائي الخطية متناظراً على V، فإن التابع:

$$q(x) = f(x, x)$$

شكل تربيعي على V (مُلحق بِـf).

ب) نفرض مميزة K تخالف 2 . اثبت أن تعاطي q يسمح بإنشاء f وذلك بواسطة الدستور :

$$f(x, y) = \frac{q(x+y) - q(x-y)}{4}$$

جـ) بخصوص القضية العكسية ، إذا كان q شكلاً تربيعياً على V فإن الدستور السابق يعرف شكلا ثنائي الخطية متناظراً f على V ، ولدينا $q(x) = f(x, x)$.

د) لكي يكون أساس V متعامداً بالنسبة لـ f ، يلزم ويكفي أن تكون عبارة q ، بالنسبة لهذا الأساس ، من الشكل :

$$q(x) = c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 + \dots + c_r x_r^2$$

(نقول عندئذٍ أن q **مبسط إلى مجموع مُربعات**) .

[تُبين النتائج السابقة أن دراسة الأشكال الثنائية الخطية المتناظرة تكافئ ، عندما تكون المميزة تُخالف 2 ، دراسة الأشكال التربيعية . سنستعمل في مُعظم الأحيان لغة الأشكال التربيعية في التمارين الموالية .]

2. ليكن K حقلاً تبديلياً مميزته تُخالف 2 . نعتبر شكلاً تربيعياً :

$$q(x) = \sum_{1 \le i, j \le n} a_{ij} x_i x_j$$

على K^n .

أ) نفرض $a_{11} \neq 0$ ، اثبت أنه يوجد شكل خطي f_1 على K^n بحيث :

$$q(x) = a_{11} f_1(x)^2 + q_1(x)$$

حيث لا يتعلق الشكل التربيعي q_1 بالمتغير x_1 (أكتب $q(x)$ على شكل ثلاثي حدود من الدرجة الثانية لـ x_1 ، معاملاته تتعلق بـ $x_2, \dots, x_n$ ، ثم ضع هذا الثلاثي الحدود على الشكل القانوني المتداول في المعاهد الثانوية والمتوسطة) .

ب) نفرض $a_{11} = 0$ و $a_{12} \neq 0$ ثم نختار الإحداثيات الجديدة التالية في K^n ، وهي الأشكال الخطية :

$$y_1 = x_1 + x_2$$
$$y_2 = x_1 - x_2$$
$$y_i = x_i \qquad (3 \leq i \leq n)$$

اثبت أن لدينا :

$$\varphi(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b_{ij} y_i y_j$$

حيث $b_{11} \neq 0$ ، وبالتالي أننا نستطيع تطبيق السؤال أ) على هذه الإحداثيات الجديدة .

ج) استنتج . مما سبق طريقة عملية لتبسيط شكل تربيعي إلى مجموع مربعات ((التمرين 1 ، د)) أو لإنشاء أساس متعامد من أجل شكل ثنائي الخطية متناظر معطى .

نطلب في التمارين من 3 إلى 8 ، وضع الشكل التربيعي المعطى على شكل مجموع مربعات بإستعمال الطريقة المُشار اليها في التمرين 2 ، حيث حقل الأساس مساوياً لـ Q ونُشير في كل حالة إلى تغيير الإحداثيات التي تؤدي إلى النتيجة المطلوبة .

3. $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1 x_2 + 2x_1 x_3 + 2x_2 x_3$

4. $x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1 x_2 - 4x_1 x_3$

5. $2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1 x_2 + 8x_1 x_3 - 27x_2 x_3$

6. $x_1^2 + 2x_2^2 + x_4^2 + 4x_1 x_2 + 4x_1 x_3 + 2x_1 x_4 + 2x_2 x_3 + 2x_2 x_4 + 2x_3 x_4$

7. $3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + 2x_1 x_2 - 4x_2 x_3 + 2x_2 x_4$

8. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1 x_2 - 3x_1 x_3 - x_2 x_3$

9. ليكن f شكلاً ثنائي الخطية على فضاء شعاعي E بُعده منته على حقل K .

أ) لتكن :

$$A = (f(a_i, a_j)) \qquad 1 \leq i, j \leq n$$

مصفوفة f بالنسبة لأساس (a_i) من E . تطابق كل شُعاع x من E بالمصفوفة العمودية المؤلفة من مركبات x بالنسبة للأساس المعتبر . اثبت أن لدينا :

$$f(x, y) = {}^t y \cdot A \cdot x$$

مهما كان x ، y في E .

ب) لتكن B مصفوفة f بالنسبة لأساس آخر (b_i) لِـ E . نرمز بِـ P لمصفوفة الإنتقال من الأساس (a_i) إلى الأساس (b_i) . اثبت أن :

$$B = {}^t P\, A\, P$$

جـ) استنتج أنه مهما كانت المصفوفة المتناظرة S من $M_n(K)$ ، توجد مصفوفة قطرية D ومصفوفة P من $GL(n, K)$ بحيث :

$$S = {}^t P\, D\, P$$

بخصوص القضية العكسية ، اثبت أنه إذا كان K حقلاً مُغلقاً جبرياً فإننا نستطيع فرض مُعاملات D مساوية لِـ 1 أو 0 ، وأنه إذا كان $K = \mathbf{R}$ فإننا نستطيع فرض هذه المُعاملات مساوية لِـ0 أو 1 + أو 1 − .

10. من أجل كل مصفوفة مُتناظرة S من الرتبة n ، معاملاتها في حقل مُغلق جبرياً K ، توجد مصفوفة X من $M_n(K)$ بحيث :

$$S = {}^t X\, X$$

والعكس بالعكس .

11. ليكن f شكلاً هيرميتياً على فضاء شُعاعي E ، بُعده منته على حقل تبديلي K (مزود بتضامن ، راجع مقدمة الفصل 36) .

أ) لتكن $A = (f(a_i, a_j))_{1 \leq i, j \leq n}$ مصفوفة f بالنسبة لأساس (a_i) لِـ E . اثبت أننا إذا طابقنا كل x من E بالمصفوفة العمودية المؤلفة من مركبات x بالنسبة للأساس المعتبر ، فإن :

$$f(x, y) = y^* \cdot A \cdot x$$

مهما كان x ، y في E .

ب) ليكن u تماثلاً داخلياً لـ E ، نرمز بـ U لمصفوفته بالنسبة للأساس (e_i) ؛ اثبت أن مصفوفة قرين u بالنسبة لـ f ، وللأساس (e_i) (نفرض هنا أن f غير منحل) هي :

$$A^{-1} U^* A$$

ج) باستعمال وجود أساس متعامد من أجل شكل هيرميتي ، اثبت أنه مهما كانت المصفوفة الهيرميتية A في $M_n(K)$ ، فإنه توجد مصفوفة هيرميتية قطرية D من $M_n(K)$ ومصفوفة قابلة للقلب P من $GL(n, K)$ بحيث :

$$A = P^* D P$$

12. حتى يكون جداء مصفوفتين هيرميتيتين مصفوفة هيرميتية يلزم ويكفي أن تتبادل المصفوفتان فيما بينهما .

13. ليكن E فضاء شُعاعياً عقدياً ، بُعده منته و f شكلاً هيرميتياً معرفاً موجباً على E .

أ) اثبت أنه من أجل كل فضاء شُعاعي جزئي M من E فإن مؤثر الإسقاط المتعامد p_M قرين ذاته بالنسبة لـ f .

ب) بخصوص القضية العكسية ، من أجل كل تماثل داخلي p لـ E بحيث :

$$p = p^* = p^2$$

يوجد فضاء شعاعي جزئي M بحيث $p = p_M$.

ج) ليكن M وَ N فضاءين شُعاعيين جزئيين من E ؛ ليكن M' (N' بالترتيب) الفضاء الجزئي المؤلف من العناصر x من M (N بالترتيب) المتعامد على $M \cap N$. اثبت أنه لكي يتبادل p_M و p_N فيما بينهما يلزم ويكفي أن يكون M' وَ N' متعامدين (وبذلك نكون في حالة مستويين متعامدين في الفضاء المعتاد) . إذا تحقق هذا الشرط نحصل على :

$$p_{M \cap N} = p_M \circ p_N$$

$$p_{M+N} = p_M + p_N - p_M \circ p_N$$

د) هل نستطيع تعميم ذلك إلى حقل اساس كيفي؟ (اعتبر فضاءات جزئية غير متساوية الإتجاه) .

14. ليكن f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً على فضاء شعاعي E بُعده منته على حقل تبديلي K . لتكن $a_1, ..., a_r$ عناصر من E وَ U فضاء الشعاعي الجزئي المولد عن هذه العناصر . إن الخاصيتين التاليتين متكافئتان : (1) U غير متساوي الاتجاه والأشعة a_i تؤلف أساساً لِـ U ؛ (2) معين العناصر $f(a_i, a_j)$ غير منعدم . نتيجة : إذا لم يقبل f أي شُعاع متساوي الإتجاه (مثال $K = \mathbf{R}$ وَ f معرف موجب) فإن الشرط اللازم والكافي لكي تكون أشعة $a_1, ..., a_r$ مستقلة خطياً هو أن يكون معين العناصر $f(a_i, a_j)$ غير منعدم .

م 15. لتكن

$$S = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

حيث $a_{ij} = a_{ji}$ ، مصفوفة تناظرية معاملاتها في حقل تبديلي K . نفرض أن الأصغريات الرئيسية

$$D_p = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1p} \\ \dots\dots\dots \\ a_{p1} \dots a_{pp} \end{vmatrix} \quad (1 \leq p \leq n)$$

لِـ S غير منعدمة . اثبت وجود مصفوفة قطرية

$$D = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & c_2 & 0 \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 \dots c_n \end{pmatrix}$$

ومصفوفة مثلثية من الشكل :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \dots\dots 0 & 0 \\ t_{21} & 1 & 0 \dots\dots 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & t_{n3} \dots t_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}$$

معاملاتها في K ، بحيث :

$$S = TDT$$

واثبت أن D وَ T معينتان تماماً بِـ S ، وأن الحدود القطرية لِـ D معطاة بالعلاقات :

$$c_1 = D_1, c_2 = D_2/D_1, \ldots, c_n = D_n/D_n - 1$$

نتيجة (جاكوبي) : ليكن :

$$q(x) = \sum a_{ij}\, x_i\, x_j \qquad (a_{ij} = a_{ji})$$

شكلاً تربيعياً بحيث تكون الأصغريات الرئيسية للمصفوفة (a_{ij}) غير منعدمة ؛ عندئذٍ نستطيع تبسيط q إلى مجموع مُربعات بواسطة تغيير مثلثي للإحداثيات (حتى نُثبت وجود T وَ D نستطيع استخدام التمرين 11 من ف 23 ، أو الإستدلال بالتدريج على n ، وذلك بكتابة :

$$S = \begin{pmatrix} S_1 & t_u \\ u & a_{nn} \end{pmatrix}$$

حيث S_1 مصفوفة مُربعة من الرتبة $n - 1$ ، و u مصفوفة عمودية ذات $n - 1$ عنصراً ، ثم نستعمل تفكيكاً إلى أجزاء مُتماثلة لِـ D وَ T) .

م16. نحتفظ برموز التمرين السابق ، ونفرض S من مرتبة كيفية r ، ثم نبحث عن كيفية كتابة S على الشكل :

$$S = TDT$$

حيث $c_1 \neq 0, \ldots, c_r \neq 0, c_{r+1} = \ldots = c_n = 0$. اثبت أنه حتى تقبل هذه المسألة حلاً ، يلزم ويكفي أن يكون لدينا :

$$D_p \neq 0 \qquad (1 \leq p \leq r)$$

17. ليكن E فضاءً شعاعياً بُعده منته على حقل تبديلي K وَ f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً وغير مُنحل على E ؛ نرمز بِـ q للشكل التربيعي $f(x, x)$. نفرض وجود أشعة متساوية الإتجاه وغير مُنعدمة لِـ f . اثبت ، من أجل كل c في K ، وجود x في E بحيث :

$$q(x) = c$$

م 18. ليكن E فضاءً شعاعياً بُعده n منته على حقل تبديلي K ، و f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً وغير مُنحل على E .

أ) ليكن H فضاءً شعاعياً جزئياً من E غير متساوي الإتجاه لـ f . اثبت وجود تشاكل ذاتي وحيد s_H لـ f بحيث :

$$s_H(x) = \begin{cases} x & ; \quad x \in H \\ -x & ; \quad x \in H^{\perp} \end{cases}$$

(التناظر بالنسبة لـ H) .

ب) ليكن u تشاكلاً ذاتياً لـ f و x شعاعاً غير متساوي الإتجاه لـ f . اثبت أن هناك شعاعاً على الأقل من بين الشعاعين $u(x) - x$ و $u(x) + x$ ، غير متساوي الإتجاه. استنتج أنه يوجد في E فضاء جزئي H غير متساوي الإتجاه بحيث : $s_H(u(x)) = x$. [خذ H مساوياً للفضاء الجزئي العمودي على $u(x) - x$ أو للفضاء الجزئي المولد عن $u(x) - x$] .

حـ) استنتج ، بالتدريج على n ، أن كل تشاكل ذاتي لـ f جداء لتناظرات بالنسبة لفضاءات جزئية غير متساوية الإتجاه من E ، وعدد التناظرات هذه لا يتجاوز n .

م م 19. ليكن E فضاءً شعاعياً بُعده منته على حقل تبديلي K و f شكلاً ثنائي الخطية مُتناظراً على E . نقول عن فضاء جُزئي U من E إنه **متساوي الإتجاه كلياً** لـ f إذا كان $f(x, x) = 0$ من أجل كل x في U ، ونقول عن U إنه فضاء جزئي متساوي الإتجاه كلياً **وأعظمي** إذا لم يكن محتوياً في أي فضاء جزئي متساوي الاتجاه كليا لـ f . نريد الآن أن نُبين بأن أبعاد الفضاءات الجزئية المتساوية الإتجاه كُلياً والأعظمية لـ f ، متساوية . يُسمى هذا البُعد المشترك **دليل f** (أو الشكل التربيعي الموافق لـ f) .

أ) حتى يكون U متساوي الإتجاه كُلياً لـ f ، يلزم ويكفي أن يكون

$$f(x, y) = 0 \qquad \forall\, x, y \in U$$

أي أن $U \subset U$ (استعمل التمرين 1)

ب) ليكن U و V فضاءين متساويي الاتجاه كلياً لـ f. اثبت أنه من أجل x في $(U \cap V)$ فإن الفضاء المولد من $Kx + V$ متساوي الاتجاه كلياً.

ج) ليكن U و V فضاءين جزئيين متساويي الاتجاه لـ f، وليكن M مكمل $U \cap V$ في U و N مكمل $U \cap V$ في V. اثبت العلاقة

$$(U \cap V^{\perp}) = (U \cap V) \oplus (M \cap N^{\perp})$$

اثبت أننا نحصل على عناصر $M \cap N^{\perp}$ بحل جملة معادلات خطية متجانسة مؤلفة من $s = \dim(N)$ معادلة ومن $r = \dim(M)$ مجهولاً. استنتج أنه إذا كان:

$$\dim(V) < \dim(U)$$

فإنه يوجد عنصر x في U لا ينتمي إلى V بحيث يكون $Kx + V$ متساوي الاتجاه كلياً.

د) اثبت أن كل فضاء جزئي متساوي الاتجاه كلياً محتوى على الأقل في فضاء جزئي متساوي الاتجاه كلياً وعظمي. استنتج باستخدام السؤال ج)، النتيجة المنصوص عليها في التمرين

م م 20. (البرهان على نظرية ويت). ليكن f شكلاً ثنائي خطية متناظر وغير مُنحل على فضاء شعاعي E بعده منته على حقل تبديلي K مميزته تُخالف 2. وليكن M و N فضاءين جزئيين M و N من E من نفس البُعد، و u تطبيقاً خطياً تقابلياً من M نحو N. نريد البرهان على أن الخاصيتين التاليتين متكافئتان: (1) يوجد تشاكل ذاتي لـ f مُطابق لـ u على M؛ (2) لدينا $f[u(x), u(y)] = f(x, y)$ مهما كان x و y في M. لما كان استلزام (1) لـ (2) بديهياً، نقتصر فيمايلي على اثبات الاستلزام من الاتجاه الثاني.

أ) ليكن x و y عنصرين من E بحيث:

$$f(x, x) = f(y, y) \neq 0$$

اثبت وجود تشاكل ذاتي f يُطبق x على y (بين أن $y - x$ وَ $x + y$ غير متساوِيي الإتجاه في آن واحد، وخذ التناظر بالنسبة لِـ H حيث H هو المستوى مصعد المُتعامد على $x - y$ أو المستقيم المولد عن $x + y$).

ب) نفرض أن M وَ N غير متساويي الإتجاه كُلياً. اثبت باستخدام السؤال أ) أنه يُمكن فرض $u(x) = x$ مهما كان x في M غير متساوي الإتجاه. ليكن E' المستوى المصعد المتعامد على x؛ اثبت أنه لكي نُنشئ تشاكلاً ذاتياً f يمد u، يكفي انشاء تشاكل ذاتي للإقتصار f' لِـ f على E' يساوي u على $M \cap E'$ استنتج في هذه الحالة نظرية ويت وذلك بالتدريج على $\dim (E)$.

ج) نفرض الآن M وَ N متساويي الإتجاه كُلياً. نختار عنصراً x لا ينتمي إلى $M^\perp$. اثبت وجود عنصر y لا ينتمي إلى $N^\perp$ بحيث:

$$f[y, u(z)] = f(x, z) \qquad \forall\, z \in M$$

اثبت أننا نستطيع فرض

$$f(y, y) = f(x, x)$$

(عوض y بِـ $y + tn$ حيث ينتمي t وَ n إلى K وَ N على الترتيب، وحيث ينبغي اختيارهما بصفة لائقة).

د) استنتج من السؤال ج) وجود فضاءين جزئيين $M' \supset M$ وَ $N' \supset N$ غير متساويي الإتجاه، ووجود تشاكل u' من M' على N' بحيث:

$$f[u'(x), u'(y)] = f(x, y) \qquad \forall\, x, y \in M'$$

على M $\quad u' = u$

أختم برهان نظرية ويت بالإعتماد عما سبق.

م م 21. ليكن E فضاء شعاعيا بُعده n منته على حقل تبديلي K، وَ f شكلا ثنائي الخطية مُتناظراً وغير منحل على E، وَ M فضاء جزئيا متساوي الإتجاه كلياً، بعده r، من E.

أ) اثبت أنه توجد في E أشعة غير متساوية الإتجاه وغير متعامدة على M

ب) اثبت وجود فضاء جزئي متساوي الإتجاه كُلياً N بحيث :

$$E = M^{\perp} \oplus N$$

(خذ نظير M بالنسبة للمستقيم المولد عن شُعاع من الأشعة المعرّفة في السؤال السابق) .

ج) ليكن $H = M^{\perp} \cap N^{\perp}$ ؛ اثبت أن :

$$E = M \oplus H \oplus N$$

وأن H لا يحتوي على أي شُعاع متساوي الإتجاه غير منعدم في الحالة التي يكون فيها M متساوي الإتجاه كُلياً وأعظمياً . نُشكل أساساً لِـ E بإتحاد أسس M ، H ، N ؛ اثبت أن مصفوفة f بالنسبة لهذا الأساس تُكتب على الشكل :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & A \\ 0 & S_1 & 0 \\ {}^tA & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

حيث A مصفوفة مربعة قابلة للقلب ، من الرتبة r ، وَ S_1 مصفوفة تناظرية من الرتبة $n - 2r$.

د) أوجد الشروط التي تجعل مصفوفة من الشكل :

$$\begin{pmatrix} U & 0 & 0 \\ 0 & V & 0 \\ 0 & 0 & W \end{pmatrix}$$

(حيث U وَ W مربعتان من الرتبة r و V مربعة من الرتبة $(n - 2r)$ تُمثل ، بالنسبة لأساس معتبر في E ، تشاكلاً ذاتياً لِـ f . استنتج أنه من أجل كل تشاكل ذاتي u للفضاء الشعاعي M ، يوجد تشاكل ذاتي f يساوي u على M . هل يُمكن استنتاج هذه النتيجة من نظرية ويت؟

22. ليكن $q(x)$ شكلاً تربيعياً على فضاء شُعاعي حقيقي (عقدي بالترتيب) E بُعده منته ؛ اثبت أنه يوجد أساس لـ E يجعل عبارة q من الشكل :

$$x_1^2 + \ldots + x_p^2 - (x_{p+1}^2 \ldots + x_{p+q}^2) \qquad (*)$$

$(x_1^2 + \ldots + x_r^2)$ بالترتيب) .

أوجد هذا الأساس (في الحالة الحقيقية والحالة العقدية) من أجل الأشكال التربيعية الواردة في التمارين من 3 إلى 8 .

23. لتكن $f_1, \ldots, f_{p+q}$ أشكالاً خطية على فضاء شُعاعي حقيقي U ، بُعده منته ؛ نفرض أن الشكل التربيعي :

$$q(x) = f_1(x)^2 + \ldots + f_p(x)^2 - f_{p+1}(x)^2 - \ldots - f_{p+q}(x)^2$$

على U معرف موجب أي يُحقق

$$q(x) > 0 \quad \forall\, x \neq 0$$

اثبت أن لدينا :

$$\dim(\mathrm{U}) \leq p$$

(لاحظ . إذا كان الأمر عكس ذلك ، أنه يوجد عنصر $x \neq 0$ حيث تكون $f_1, \ldots, f_p$ كلها منعدمة) .

م **24.** ليكن $q(x)$ شكلاً تربيعياً على فضاء شُعاعي حقيقي E بُعده منته . نختار أساساً لـ E يجعل q تُكتب على الشكل (*) الوارد في التمرين 22 ؛ اثبت باستعمال التمرين السابق . أن كل فضاء جزئي شُعاعي U من E . لا يُمكن أن يتجاوز بُعده p عندما يكون q مُعرفاً موجباً على U . استنتج (قانون القصور للأشكال التربيعية) أن الصحيحين p وَ q الواردين في التمرين 22 مستقلان عن اختيار أساس E الذي يجعل $q(x)$ تُكتب على الشكل (*) .

[تُسمى الثنائية (p, q) المؤلفة من عدد المربعات الموجبة p وعدد المربعات السالبة q في العبارة (*) إشارة الشكل التربيعي المعتبر أو

الشكل الثنائي الخطية المتناظر الموافق له . إن العدد p هو البعد الأعظمي للفضاءات الجزئية التي تجعل الشكل المعطى معرفاً موجباً ، والعدد q هو البعد الأعظمي للفضاءات الجزئية التي تجعل الشكل المعطى معرفاً سالباً] .

م 25. نقول عن شكلين تربيعيين q و q' على فضاء شعاعي E بعده منته على حقل تبديلي إنهما متكافئان إذا وجد تشاكل ذاتي u لـ E بحيث :

$$q'(x) = q(u(x)) \qquad \forall x \in E$$

نفرض أن حقل الأساس هو $\mathbf{R}$ ، اثبت أنه لكي يكون q و q' متكافئين يلزم ويكفي أن تكون لهما نفس الإشارة .

26. اثبت أن الشكلين التربيعيين التاليين على $\mathbf{R}^3$ متكافئان ثم عيّن شكلاً ذاتياً لـ $\mathbf{R}^3$ يحوّل الشكل الأول إلى الثاني :

$$2x^2 + 9y^2 + 3z^2 + 8xy - 4xz - 10yz$$
$$3x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 4xy - 4xz + 8yz$$

نفس المسألة فيما يخص الشكلين :

$$5x^2 + 5y^2 + 2z^2 + 8xy + 6xz + 6yz$$
$$4x^2 + y^2 + 9z^2 - 12xz$$

م 27. نعتبر على $\mathbf{R}^n$ الشكل الثنائي الخطية المتناوب f الموافق للشكل التربيعي :

$$q(x) = x_1^2 + \dots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \dots - x_{p+q}^2$$

ونفرض $q \geq p$. اثبت أن الفضاء الجزئي المولد عن الأشعة

$$e_1 + e_{p+1}, e_2 + e_{p+2}, \dots, e_p + e_{2p}, e_{p+q+1}, \dots, e_n$$

متساوي الإتجاه كُلياً وأعظمي لـ f (التمرين 19) .

استنتج أنه إذا كان f شكلاً ثنائي الخطية متناظراً ، إشارته (p, q)

على فضاء شعاعي حقيقي بُعده n ، فإن دليل f (التمرين 14) هو $r + n - p - q$ حيث يرمز r لأصغر الصحيحين p وَ q .

ما هو بُعد الفضاءات الجزئية المتساوية الإتجاه كُلياً والأعظمية التي تُكتب على شكل لورانتز؟

28. ليكن f شكلاً ثنائي الخطية متناوباً وغير منحل على فضاء شُعاعي حقيقي E بُعده منته. ليَكن M وَ N فضاءين شُعاعيين جزئيين لِـ E بحيث $\dim(M) = \dim(N)$. حتى يوجد تشاكل ذاتي لِـ f يُطبق M على N ، يلزم ويكفي أن يكون اقتصاراً f على M و N من نفس الإشارة (استعمل نظرية ويت والتمرينين 24 وَ 25) .

نأخذ f مساوياً لشكل لورانتز، ونعتبر على مجموعة الفضاءات الجزئية الشُعاعية من E ، علاقة التكافؤ «يوجد تشاكل ذاتي u لِـ f بحيث $u(M) = N$» . ما هو عدد عناصر مجموعة حاصل القسمة؟

نفس السؤال باعتبار الشكل التربيعي :

$$x^2 + y^2 + z^2 - t^2 - u^2$$

على $\mathbf{R}^5$.

29. حتى تكون مصفوفة هيرميتية عقدية H من $M_n(\mathbf{C})$ ، موجبة يلزم ويكفي أن توجد مصفوفة X من $M_n(\mathbf{C})$ بحيث :

$$H = X^* X$$

إذا كانت، بالإضافة إلى ذلك، H حقيقية نستطيع أن نفرض X حقيقية [استعمل التمرين 11، جـ ولاحظ أن الحدود القطرية لِـ D موجبة عندما تَكون H موجبة] .

استنتج أنه إذا كانت :

$$H = (a_{ij})_{1 \le i, j \le n}$$

مصفوفة هيرميتية عقدية موجبة، فإن :

$$D_p = \begin{vmatrix} a_{11} \dots a_{1p} \\ \dots\dots \\ a_{p1} \dots a_{pp} \end{vmatrix} \geq 0 \qquad 1 \leq p \leq n$$

كما أن $D_p = 0$ تستلزم $D_{p+1} = \dots = D_n = 0$

(اثبت في البداية أن $D_n \geq 0$، ثم عوّض H بمصفوفة معينها D_p واستعمل التمرين 16) . حالة $n = 2$؟ (أوجد من جديد متراجحة كوشي - شوارتز و «إشارة ثُلاثي الحدود» .)

م 30. لتكن :

$$H = (h_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

مصفوفة هيرميتية عقدية موجبة . اثبت وجود مصفوفة مُثلثية عقدية

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \dots t_{1n} \\ 0 & t_{22} \dots t_{2n} \\ \dots & \dots\dots \\ 0 & 0 \quad \dots t_{nn} \end{pmatrix}$$

حيث t_{ii} حقيقية موجبة ، وبحيث :

$$H = T^* T$$

(استعمل التمرينين 15 وَ 16) . إذا كانت H قابلة للقلب فإن T وحيدة .

استنتج مما سبق أن لدينا المتراجحة التالية مهما كانت المصفوفة الهيرميتية الموجبة H :

$$0 \leq \text{dét}(H) \leq h_{11} h_{22} \dots h_{nn};$$

أما إذا كانت H قابلة للقلب فإننا لا نستطيع الحصول على المساواة (بدل المتراجحة) إلاّ إذا كانت H قطرية .

م 31. لتكن A مصفوفة مربعة قابلة للقلب مُعاملاتها عقدية . اثبت وجود مصفوفة واحدية $\cup$ ومصفوفة مثلثية $T = (t_{ij})$ حيث $0 < t_{ii}$ مهما كان i ، بحيث :

$$A = \cup . T$$

واثبت أن U وَ T وحيدان (طبق التمرين السابق على A^*A) . اثبت أن U وَ T حقيقيتان عندما تكون A حقيقية .

م 32. لتكن $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ مصفوفة عقدية ، اثبت أن لدينا :

$$|\text{dét}(A)|^2 \leq \prod_{j=1}^{j=n} (|a_{1j}|^2 + \ldots + |a_{nj}|^2)$$

م 33. اثبت أنه حتى تكون مصفوفة هيرميتية عقدية ، معرفةً موجبة يلزم ويكفي أن تكون كل أصغرياتها الرئيسية موجبة تماماً (استعمل التمرين 30 واحسب العناصر t_{ii} بدلالة الأصغريات الرئيسية للمصفوفة المعطاة) .

34. أوجد بواسطة التمرين السابق القيم الحقيقية لِـ t التي تجعل الأشكال التربيعية التالية مُعرفة موجبة :

$$5x_1^2 + x_2^2 + tx_3^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 2x_2x_3$$
$$2x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2tx_1x_2 + 2x_1x_3$$
$$2x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + 2tx_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3$$
$$t(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 8x_2x_3$$

م م 35. اثبت أن كل مصفوفة هيرميتية موجبة تساوي مجموع مصفوفات من الشكل :

$$\begin{pmatrix} c_1\bar{c}_1 & \ldots & c_1\bar{c}_n \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_n\bar{c}_1 & \ldots & c_n\bar{c}_n \end{pmatrix}$$

والعكس بالعكس .

استنتج أنه إذا كانت مصفوفتان عقديتان $(a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ وَ $(b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ هيرميتيتين وموجبتين فإن الأمر كذلك فيما يخص المصفوفة

$$(a_{ij}\ b_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$$

التي نحصل عليها بضرب الحدود ذات الدليل المشترك فيما بينها في المصفوفتين المعتبرتين .

36. لتكن H مصفوفة هيرميتية عقدية . اثبت أن $1 - iH$ تقبل القلب ، وأن

$$U = (1 + iH)(1 - iH)^{-1} = (i - H)(i + H)^{-1}$$

واحدية ، وأن $1 -$ ليست قيمة ذاتية لـ U . فيما يخص القضية العكسية ، اثبت أن كل مصفوفة واحدية U لا تقبل $1 -$ كقيمة ذاتية ، نستطيع الحصول عليها بهذه الطريقة (تحويل كايلي) .

م 37. لتكن H مصفوفة عقدية هيرميتية موجبة . اثبت (انبسط H إلى شكل قطري بواسطة مصفوفة واحدية) وجود مصفوفة هيرميتية موجبة وحيدة H' بحيث :

$$H = H'^2$$

(نقول عن H' إنها الجذر التربيعي الموجب لـ H ، ونكتب $H' = H^{1/2}$) .

م 38. لتكن S وَ T مصفوفتين هيرميتيتين عقديتين ؛ نفرض S معرفاً موجباً . اثبت أن القيم الذاتية لِـ ST حقيقية ، وموجبة عندما تكون T موجبة (استعمل التمرين 37) .

م 39. لتكن A مصفوفة مربعة قابلة للقلب ، معاملاتها عقدية . ثبت أن المصفوفة

$$A^*A$$

هيرميتية ومعرفة موجبة . باعتبار جذرها التربيعي الموجب ثبت أننا نستطيع أن نكتب :

$$A = U \cdot H$$

حيث U واحدية وَ H هيرميتية موجبة ؛ برهن من جهة ثانية على أن هذه المسألة تقبل حلاً واحداً . أثبت أنه إذا كانت A حقيقية فالأمر كذلك فيما يخص U وَ H .

م م 40. لتكن $F \subset M_n(\mathbb{C})$ مجموعة مصفوفات ناظمية وتتبادل مثنى مثنى . أثبت وجود مصفوفة واحدية U من $M_n(\mathbb{C})$ بحيث تكون $U A U^{-1}$ ، U

قطرية من أجل كل مصفوفة A من F . التفسير الهندسي؟ (استعمل التمرين 22 من الفصل 34) .

المطلوب في التمارين، من 41 إلى 47، إرجاع المصفوفة المُتناظرة الحقيقية المُعطاة إلى مصفوفة قطرية بواسطة مصفوفة مُتعامدة حقيقية .

.41 $\begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ ، **.42** $\begin{pmatrix} 11 & 8 & 2 \\ 8 & 5 & -10 \\ 2 & -10 & 2 \end{pmatrix}$

.43 $\begin{pmatrix} 8 & 4 & -1 \\ 4 & -7 & 4 \\ -1 & 4 & 8 \end{pmatrix}$ ، **.44** $\begin{pmatrix} 12 & -2 & -2 \\ -2 & 14 & -4 \\ -2 & -4 & 14 \end{pmatrix}$

.45 $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -3 \\ -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ، **.46** $\begin{pmatrix} 5 & -5 & 1 & 3 \\ -5 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & -5 \\ 3 & 1 & -5 & 5 \end{pmatrix}$

.47 $\begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & -2 \\ 0 & 4 & 5 & 2 \\ 0 & -2 & 2 & 8 \end{pmatrix}$

م **.48** ليكن E فضاء شعاعياً حقيقياً بُعده منته، وَ f شكلا ثُنائيَ الخطية متناظراً معرفاً موجباً على E ، و u تشاكلاً ذاتياً لِـ f . نفرض أن الفضاءات الشُعاعية الجزئية الوحيدة من E المستقرة بِـ u هي E وَ $\{0\}$. أثبت عندئذٍ أننا في احدى الحالتين التاليتين : (1) بعد E هو 1 وَ u يساوي $1+$ أو $1-$ ؛ (2) بعد E هو 2 ويوجد أساس متعامد ومتجانس لِـ f يجعل مصفوفة u ، بالنسبة لهذا الأساس، تُكتب على الشكل :

$$\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

حيث φ عدد حقيقي يُخالف مُضاعفات π .

م **49.** ليكن E فضاء شعاعيا حقيقياً بعده منته، وَ f شكلا ثُنائي الخطية متناظراً ومعرفاً موجباً على E ، وَ u تشاكلاً ذاتياً لِـ f. أثبت وجود أساس لِـ E مُتعامد ومتجانس بالنسبة لِـ f، يجعل مصفوفة u ، بالنسبة اليه ، تُكتب على الشكل :

$$\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & & & & & & & & & 0 \\
 & \ddots & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & \ddots & & & & & & \\
 & & & & -1 & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & \\
 & & & & & & -1 & & & \\
 & & & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & \\
 & & & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & \\
 & & & & & & & & & \ddots \\
 & & & & & & & & & \cos\varphi_h \quad -\sin\varphi_h \\
0 & & & & & & & & & \sin\varphi_h \quad \cos\varphi_h
\end{array}\right|$$

حيث العناصر φ_i أعداد حقيقية تُخالف مُضاعفات π .

50. من أجل كل عدد حقيقي t ، نضع :

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t & 0 \\ -\sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad ; V(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

اثبت أنه من أجل كل مصفوفة مُتعامدة حقيقية X من الرتبة 3 وذات معين يساوي 1 (مصفوفة دوران في الفضاء المعتاد) توجد أعداد حقيقية φ ، w ، v بحيث :

$$X = U(\varphi)\, V(\theta)\, U(\psi)$$

(لاحظ أنه إذا كان لدينا أساسان مُتعامدان i, j, k وَ u, v, w فإننا ننتقل من الأول إلى الثاني بإجراء دوران حول k بحيث يُصبح i في المستوى المولد عن u وَ v ، ثم دوران حول تقاطع المستويين ij وَ uv بحيث يُصبح

k على w ، وأخيراً، دوران حول w) . تسمى الأعداد φ, ψ, θ زوايا أويلر للمصفوفة X (أو للدوران الموافق لها) .

م م 51. نعتبر المصفوفة الهيرميتية

$$S = \begin{pmatrix} 1_p & 0 \\ 0 & -1_q \end{pmatrix}$$

من الرتبة $p + q$ ذات الإشارة (p, q) . أثبت أن زمرة التشاكلات الذاتية لـ S ، أي زمرة المصفوفات W من $GL(p + q, C)$ بحيث تكون :

$$W^* S W = S$$

هي مجموعة المصفوفات

$$W = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

التي تتمتع بالخاصية التالية : توجد مصفوفة عقدية Z ذات p عموداً وَ q سطراً بحيث تكون المصفوفة :

$$1_p - Z^* Z$$

مُعرَّفة موجبة ؛ وتوجد مصفوفتان واحديتان U وَ V رتبتاهما p وَ q بحيث تتحقق العلاقات :

$$A = (1 - Z^* Z)^{-1/2} U; \quad B = Z^*(1 - Z Z^*)^{-1/2} V$$
$$C = Z(1 - Z^* Z)^{-1/2} U; \quad D = (1 - Z Z^*)^{-1/2} V$$

وبحيث تكون U ، V ، Z معينة تماماً بـ W . إذا كانت W حقيقية ، فالأمر كذلك فيما يخص U ، V ، Z . [نضع :

$$H^{-1/2} = (H^{1/2})^{-1}$$

حينما تكون H معرفة موجبة] .

م 52. ليكن V فضاء شعاعياً بُعده $n = 2m$ زوجي على حقل k .

أ) ليكن f شكلا ثُنائي الخطية متناوباً (الفصل 22) غير منحل

على V . نختار شُعاعين a و b بحيث $f(a, b) = 1$ ونعتبر المستوى $P \subset V$ المولد عن a و b . أثبت أن اقتصار f على P غير مُنحل، واستنتج أن V مجموع مباشر لـ P ولفضاء الجزئي V' المؤلف من الأشعة المتعامدة على P من أجل f . استنتج أن V يقبل أساساً يجعل عبارة $f(x, y)$ بدلالة احداثيات x و y تكتب على النحو :

$$f(x, y) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i\, y_{2n-1} - y_i\, x_{2n-1})$$

وذلك بالنسبة للأساس المعتبر .

استنتج أنه بالإمكان تحويل شكلين ثنائي الخطية متناوبين على V ، وذلك بواسطة تشاكل ذاتي لـ V بحيث يتحول الأول إلى الثاني . هل توجد أشكال ثُنائية الخطية ومتناوبة وغير مُنحلة على فضاء بُعده فردي؟

ب) نختار شكلا ثُنائي الخطية مُتناوباً وغير مُنحل f على V ، ونُسمي مستوياً غير منحل من V كل فضاء جزئي P بُعده 2 من V بحيث يكون f غير مُطابق للصفر . لتكن $Sp(V)$ زمرة التشاكلات الذاتية u لِـ V بحيث :

$$f\big(u(x), u(y)\big) = f(x, y)$$

مهما كان x وَ y في V أثبت

أنه إذا كان p ينتمي إلى X فإن الزمرة الجزئية من $Sp(V)$ التي تترك p ثابت (أي مجموعة العناصر u من $Sp(V)$ بحيث $u(p) = p$) متشاكلة مع الجداء

$$SL(2, k) \times Sp(W)$$

حيث يرمز W للمجموعة العمودية على p في V بالنسبة لـ f .

ج) نفرض الآن أن k منته وعدد عناصره q . ليكن x عنصراً غير مُنعدم من V . أثبت أن x ينتمي إلى مستويات غير منحلة عددها q^{n-2} ، استنتج الدستور :

$$\text{Card}(X) = \frac{q^n - 1}{q^2 - 1} q^{n-2}$$

ليكن P مستوياً غير مُنحل وَ W المجموعة العمودية عليه في V . أثبت أن لدينا :

$$\text{Card}\big(Sp(V)\big) = (q^n - 1) q^{n-1} \text{Card}\big(Sp(W)\big)$$

استنتج ، بالتدريج على n ، الدستور :

$$\text{Card}\big(Sp(V)\big) = q^{m(2m-1)} \prod_{i=1}^{i=n} (1 - 1/q\,2i)$$

م53. لتكن X مجموعة من 6 عناصر . ولتكن Y مجموعة أجزاء X التي تتألف من 0 عنصراً أو من عنصرين ، نعرف قانون تركيب متناظر على Y بوضع :

$$A + \Phi = A; \qquad \forall A \in Y$$
$$A + A = \Phi; \qquad \forall A \in Y$$
$$A + B = A \cup B - A \cap B;$$

إذا كان $A \cap B$ مؤلفاً من عنصر واحد

$$A - B = X - (A \cup B)$$

إذا كان A وَ B منفصلين وغير خاليين

أ) بين أن هذا القانون يجعل من Y زمرة تبديلية من الرتبة 16 وأن عنصرها الحيادي هو Φ . أثبت أننا نستطيع تزويد Y بنية فضاء شعاعي على الحقل $k = \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ وذلك بطريقة وحيدة، وأن بُعد Y يساوي 4 في هذه الحالة .

ب) إذا كان A وَ B عنصرين من Y ، نرمز بِـ$f(A, B)$ لعنصر k المعرف بالموافقة :

$$f(A, B) \equiv \text{Card}(A \cap B) \pmod 2$$

أثبت أن f شكلا ثُنائي الخطية متناوباً وغير منحل على Y .

ج) لتكن A ، B ، C ثلاثة أجزاء من X ، ويتكون كل واحد منها من عنصرين ، أثبت أن $\{\Phi, A, B, C\}$ فضاء جزئي متساوي الإتجاه كُلياً ، بُعده 2 ، من Y (بالنسبة للشكل f) .

د) لتكن S_X زمرة تبديلات X ؛ انها زمرة متشاكلة مع الزمرة المتناظرة S_6 . لتكن من جهة أخرى $Sp(Y)$ زمرة التشاكلات الذاتية لِـ Y التي تحتفظ بالشكل f (نرمز عادة بِـ $Sp_4(F_2)$ لهذه الزمرة) . أثبت أن كل عنصر من S_X يعرف عنصراً من $S_p(Y)$ ، وأن التماثل $\varepsilon : S_X \to Sp(Y)$ الذي نحصل عليه بهذه الطريقة تشاكل . (أثبت أولاً أن ε تباين ثم قارن رتبتي S_X وَ $Sp(X)$.)

ر) ليكن F الفضاء الشعاعيَ على k المؤلف من التوابع $f: X\to k$ بحيث $\sum\limits_{x\in X} f(x) = 0$. لتكن $V= F/\{0,1\}$ نسبة F على الفضاء الجزئي الذي بُعده 1 ، والمولد عن التابع الثابت 1. نُلحق بكل عنصر A من Y بالتابع المميز 0_A (المساوي لِـ 1 على A ولِـ 0 على $X-A$) . أثبت أن التابع $A\to 0_A$ يُعرف تشاكلا من الفضاء الشُعاعي Y على الفضاء الشُعاعي V . أثبت أن هذا التشاكل يحوّل الشكل الثُنائي الخطية f الوارد في ب) إلى الشكل :

$$u(0, 0') = \sum_{x\in X} 0(x)\, 0'(x)$$

المراجع

1) A. A. ALBERT, Introduction to algebraic Theories, University of Chicago Press, 1941

كثيرات حدود، مصفوفات، مُعادلات خطية، تبسيط المصفوفات (بما فيه نظرية جوردان)، عموميات حول الحلقات والحقول. عرض أولي وقديم العهد، كما أنه مركز جداً ودقيق. تمارين.

2) A. A. ALBERT, Fundamental concepts of higher algebra, University of Chicago Press, 1956.

زمر، حلقات، حقول، فضاءات شُعاعية مصفوفات، توسيعات جبرية لحقول تبديلية، حقول منتهية. مستوى مرتفع قليلاً بالمقارنة مع المؤلف السابق، وهو يتوجه إلى الطلاب غير المبتدئين. تمارين.

3) E. ARTIN, Geometric Algebra, Interscience Publishers, New York, 1957.

4) E. ARTIN, Algèbre Géométrique, Gauthiér-Villars, Paris, 1962

فضاءات شُعاعية، ثنوية، مُعادلات خطية، زمر، حقول (عروض سريعة جداً)؛ الإنشاء الموضوعي للهندسة الأولية (التآلفية والإسقاطية) دراسة هندسية للزمر المتعامدة «والسيمبلكتيكية» والخطية. نستطيع الاستفادة منه أساساً في الفصل 36 من هذا الكتاب، باعتباره مكملاً للفصل المذكور. عرض من الدرجة الأولى في الجودة، ينطلق من مستوى أولي جداً. وينتهي مُباشرة، في الموضوع المعروض، عند الأسئلة المفتوحة (أي تلك التي لم تجد حلاً لحد الآن).

5) G. BIRKHOFF and S. Maclane, A survey of modern Algebra, Macmillan, New York 1941.

يُغطي تقريباً كل مواضيع هذا الـكتاب ، ويعرض اضـافة إلى ذلك نظرية التوسيعات الجبرية للحقول التبديلية (نظرية غالوا ، الخ...) عرض حديث وقابل للفهـم بسهولة ، وهو يتضمن العديد من التمارين السهلة في معظمها .

6) N. BOURBAKI, Eléments d'histoire des mathématiques, Hermann, Paris, 1960.

إن قراءة مجموعة هذه «المذكرات التاريخية» التي اضـافها ن. بورباكي إلى مختلف أقسـام مؤلفة ، ليست ضرورية إذا ما كان اهتمامنا موجهاً فقط نحو الجوانب العملية للرياضيات . أما إذا كُنا نُريد فهم لمـاذا أُدخلت المفاهيم المعروضة هنا ، سواء كانت قديمة العهد أو حديثة ، فإنه يجدر بنا دراسة هذه المذكرات التاريخية . عرض صعب بمقدار ؛ لم يكتف المؤلف بالـكتابة بلغة (فرنسية) قاعدية .

7) I. M. GEL'FAND, Leksii po line ínoí algebre, Gostekhizdat, Moscou, 1951

8) I. M. GEL'FAND, Lectures on linear Algebra, Interscience Publishers, New York, 1961.

يعرض الجزء الأكبر من هذا الـكتاب بصفة مُفصلة عُموماً (وخاصة فيما يتعلق بنظرية جوردان) المواضيع لواردة في الفصول 34 ، 35 ، 36 ؛ وهو يفرض أن نظرية المعينات وجمل المعادلات الخطية معروفة لدى القارئ . عرض بمثابة مُقدمة لنظرية فضـاءات هيلبرت ولنظرية الزمر القديمة العهد (المُتعامدة ، الواحدية الخطية . الخ...) . نستطيع أن نُعيب على المؤلف كونه لم يفصل بوضوح بين الخاصيات ذات الطابع الخطي المحض والخاصيات التي تعتمد على استخدام الأشكال التربيعية . هذا من جهة . ومن جهة أخرى فقد أهمل المؤلف الحقول الأخرى غير **R** وَ **C** . اسلوب جُدّ واضح .

9) W. GRAEUB, Linear Algebra, Springer, Berlin, 1958.

يُغطي الفصول من 10 إلى 25 ومن 34 إلى 36 . وذلك بصورة أكثر تفصيلاً فيما

يخص بعض النقاط (يخص بالذكر تلك التي تتعلق بالأشكال المتعددة الخطية المتناوبة). عرض ممتاز. أجمل طباعة في العالم. الطبعة الثانية بالإنكليزية.

10) P. R. HALMOS, Finite-dimensional vector spaces,
Van Nostrand, Princeton, 1958.

فضاءات شعاعية، ثنوية، فضاءات القسمة، مبادئ في الجداءات التوترية والأشكال المتعددة الخطية المتناوبة، تطبيقات خطية ومصفوفات، قيم ذاتية، شكل جوردان، الفضاءات الإقليدية والمصفوفات العمودية. ... هذا الكتاب (الذي صدر أول مرة سنة 1542) بمثابة مقدمة لنظرية فضاءات هيلبرت (تحتل دراسة الأشكال التربيعية الموجبة قرابة ثلث صفحات الكتاب) وهو يهمل، عن قصد، جوانب هامة أخرى (مثل المعادلات الخطية، المعينات، القواسم الأولية). عرض بسيط جداً وهندسي جداً، مستواه يفوق قليلاً مستوى المبتدئين. تمارين نظرية سهلة جداً عموماً.

11) H. HASSE, Höhere Algebra, (جزءان).
Walter de Gruyter (Sammlung Göschen), Berlin, 1951-1957.

12) H. HASSE, Higher Algebra, (جزءان).
F. Ungar, New York, 1954.

يتناول الجزء الأول الحلقات والحقول وكثيرات الحدود والزمر والمعادلات الخطية (على حقل تبديلي أو غير تبديلي). كما يتعرض لنظرية المعينات. أما الجزء الثاني فيبحث في قسمة كثيرات الحدود، والتوسيعات الجبرية للحقول التبديلية، وفي نظرية غالوا. يعتبر مؤلفه واحداً من مؤسسي الجبر الحديث، ولذا بقي الكتاب (الذي ترجع طبعته الأولى إلى سنتي 1926، 1927) غير مُتأثر بعامل الزمن، بل لا زال يعتبر في العديد من النقاط أحسن بكثير من كُتب صدرت بعده ومنها ما صدر في السنوات الأخيرة فقط. أسلوب رائع فيما يخُص الوضوح والدقة. عيبه الوحيد هو بعض التحوير في التركيز الذي تفرضه نوعية طباعة مجموعة غوشن (Göschen) نظراً لصغر حجم كتبها؛ ولم تزل الترجمة الأمريكية هذا العيب لكنها وفرت له طباعة بخط متوسط الحجم.

13) K. HOFFMAN and R. KUNZE, Linear Algebra, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961.

هو واحد من الكُتب الأُولية العديدة التي صدرت خلال السنوات الأخيرة في الولايات المتحدة. ومعظم هذه الكتب تُعتبر ذات فائدة رياضية مشكوك فيها، لكن هذا الكتاب يفوق المعدل بكثير من ناحية دقة العرض وصلاح الاسلوب. وهو موجه في البداية إلى طُلاب السنوات الأولى الجامعية («اندرغرادويت») للمعهد التقني لولاية مستشوست ((M.I.T)) ، إلاّ أنه قابل للفهم من طرف المبتدئ الفرنسي [وكذلك الجزائري والشمال الافريقي عامة. (المترجم)]. هناك العديد من التمارين يُعطي الفصول من 10 إلى 24 ومن 34 إلى 36.

14) A. G. KUROŠ, Kurs vysšeí algebry, Fizmatgiz, 1959.

يُعطي برنامج هذا الكتاب (ما عدا نظرية المجموعات) ويتجاوزه في العديد من النقاط (برهان نظرية دالمبير، الجذور الحقيقية للمعادلات الجبرية ذات المُعاملات الحقيقية، التوابع المُتناظرة للجذور والإزالة، بُنية الزمر التبديلية المنتهية، الخ...). عرض تقليدي على العُموم تدخل فيه المفاهيم «الحديثة» (الفراغات الشُعاعية، الحقول، الزمر) حين تُصبح تقريباً في غنى عنها، وهو ما قد ينال إعجاب البعض!

15) S. LANG, Algebra, Addison-Wesley, Reading, 1965.

زمر، حلقات، حقول، كثيرات حدود؛ مقاييس نوثرية؛ نظرية الحقول (التوسيعات الجبرية والمتسامية، نظرية غالوا، التقييات)؛ أشكال ثُنائية الخطية، نظرية جوردان، الجبر الموتري، تمثيل الزمر المنتهية. على الرغم من أن الكتاب يبدأ من مُستوى أولي جداً إلاّ أنه من الواضح أن عرض المؤلف لانغ (LANG) مُخصص لاولئك الذين يرغبون، بعد استيعابهم لمحتوى هذا الكتاب، في المضي إلى أبعد من ذلك؛ عندئذٍ توفر لهم قراءة كتاب لانغ هذا التقدم بسرعة خارقة للعادة. هناك العديد من التمارين البناءة.

16) A. LENTIN, J. RIVAUD, Leçons d'Algèbre moderne, Vuibert, Paris, 1961.

يُغطي شطراً مُعتبراً من المواضيع التي تناولناها هنا ، يتوجه الكتاب إلى طُلاب أقسام الرياضيات الخاصة ، لكنه قابل للإستعمال من طرف طلاب الرياضيات العامة ، ذلك إن مقرري الخبر لهذين التعليمين متقاربان جداً الآن . هناك العديد من التمارين .

17) A. LICHNÉROWICZ, Algèbre et Analyse linéaires,
Masson, Paris, 19

فضاءات شُعاعية ، حساب المصفوفات ، مُعادلات خطية ، معينات وأشكال مُتناوبة ، قيم ذاتية ، وكذا العديد من الفصول في فرع التحليل ، وهي غير موجهه للمبتدئين . هناك نقص في الأمثلة ، وأكثر من ذلك ، النقص في التمارين .

18) A. I. MAL'CEV, Foundations of linear Algebra,
W. H. Freeman, San Francisco, 1963.

مصفوفات ومعينات ، فضاءات شُعاعية ، نظرية جوردان ، فضاءات اقليدية ، أشكال تربيعية ، تحويلات مُتعامدة ، «سيمبلكتيكية» ، واحدية ، الخ . . . ، أشكال مُتعددة الخطية ، وترات ، جبر خارجي . تمارين . عرض ممتاز نشك في تمكن القارئ المبتدئ من استيعابه في الحين ، إلاّ أنه سيستفيد منه خلال سنوات عديدة .

19) L. MIRSKY, An Introduction to linear Algebra,
Clarendon Press, Oxford, 1955.

يُغطي الفصول من 10 إلى 24 ومن 34 إلى 36 ، وهو أكثر تفصيلاً فيما يخص بعض النقاط (خاصة فيما يتعلق بنظرية جوردان) . عرض كامل وسليم مع بعض النقاط الغريبة (مثلاً : تقديم «الفضاءات الشُعاعية (spaces vector)» بوصفها أجزاء من K^n و «المنوعات الخطية (linear manifold)» بوصفها الفضاءات الشُعاعية الواردة في هذا الكتاب ولدى جميع الرياضيين) . وهو مُفيد جداً عند الرجوع إليه . هناك العديد من التمارين الهامة . اسلوب وطباعة من الطراز البريطاني المعروف .

20) G. D. MOSTOW, J. H. SAMPSON, J. P. MEYER,
Fundamental Structures of Algebra,
McGraw Hill, New York, 1963.

برنامج ومستوى يُعادلان تقريباً هذا الكتاب، مع بعض الإضافات حول المُعادلات التفاضلية الخطية والوترات، وقد يكون مدخله أسهل في البداية. عرض جُد واضح، وهُناك الكثير من الأمثلة والتمارين. نعتقد أنه يُمثل أحسن مُقدمة إجمالية للجبر تُعرض اليوم في السوق العالمية.

21) O. SCHREIER, E. SPERNER, Einführung
in die analytische Geometrie und Algebra, (جزءان),
Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen, 1955.

22) O. SCHREIER, E. SPERNER, Introduction to modern
Algebra and matrix theory, chelsea Publishing Cy.,
New York, 1951.

فضاءات شُعاعية على $\mathbf{R}^n$، مُعادلات خطية، معينات وأشكال مُتعددة الخطية مُتناوبة، أشكال تربيعية وإزاحات، حقول، كثيرات حدود، نظرية دالمبير - غوس، بُنية الزمر التبديلية من الصنف المنتهي، مصفوفات، قيم ذاتية، نظرية جوردان. تحتوي الطبعة الألمانية بالإضافة إلى ذلك، فصلاً مطولاً حول الهندسة الإسقاطية، أُهمل في الترجمة الامريكية. صدر هذا الكتاب لأول مرة سنة 1931، وكان عندئذ الأول، مع الكتاب الصغير لهاس السالف الذكر، الذي قدم عرضاً أولياً يستعمل بصفة دائمة، الطرق «الهندسية»، وكان متأثراً بأعمال الرياضيين الألمان خلال العشرينات من هذا القرن. إن ما قلناه بخصوص كتاب هاس، وهو كونه أحدث من معظم الكتب التي صدرت بعده، ينطبق تماماً على هذا الكتاب. أسلوب أعذب من أسلوب هاس (اقتصاد الورق لم يكن من أهداف صاحب المطبعة). نوصي بقراءة هذا الكتاب. هناك بعض التمارين.

23) G. E. Šilov, Vvedenie v teoriju lineĭnykh prostranstv,
Gostekhizdat, Moscou, 1956.

24) G. E. SHILOV, An Introduction to the Theory of linear Spaces, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1961.

معينات، فضاءات شُعاعية، مُعادلات خطية، تطبيقات خطية ومصفوفات، أشكال ثُنائية الخطية وتربيعية، أشعة ذاتية (نظرية جوردان لم تُقدم)، تصنيف سطوح الدرجة الثانية، مبادئ حول فضاءات هيلبرت والمؤثرات المستمرة كلية. عرض أولي جداً وواضح جداً. وهو يتجه، مثل كتب غلفوند (Gel'fand) وهالموس (Halmos)، نحو التحليل وفراغات هيلبرت، أكثر من اتجاهه نحو الفروع الرياضية الأخرى. عيبه الجدي الوحيد (والذي نجده أيضاً عند غلفوند وميرسكي وفي العديد من العروض التي لم نورد ذكرها هنا) هو استخدام نظرية المعينات لإثبات خاصيات الفراغات الشُعاعية ذات الأبعاد المنتهية (خاصة كون كل الأُسس تحتوي على نفس عدد العناصر). لكن هذه النقطة، التي نستطيع تعديلها بسهولة عندما نرغب في ذلك، لا تشمل سوى جزء صغيراً جداً من الكتاب. نوصي المبتدئ بقراءته.

25) B. L. VAN der WAERDEN, Moderne Algebra, (جزءان), Springer, Berlin, 1955.

26) B.. L. VAN der WAERDEN, Modern Algebra, (جزءان), F. Ungar, New York, 1950.

إن هذا الكتاب المشهور، الذي صدرت طبعته الأولى سنة 1930، قد بقي لمدة طويلة العرض الإجمالي الوحيد للجبر «الحديث». اسلوب واضح جلي مُركز. مستوى يفوق بكثير مستوى الكتب السابقة. موجه إلى الطلبة المتقدمين الراغبين في سلوك طريق البحث الرياضي، دون غيرهم.

27) O. ZARISKI, P. SAMUEL, (جزءان), Commutative Algebra, D. Van Nostrand Cy., Princeton, 1958.

يُعرض كل ما يلزم للحساب «العالي» (حقول الأعداد الجبرية) وللهندسة الجبرية: توسيعات الحقول، الحلقات النوثرية، حلقات ديدكند، حلقات التقييم، الخ... قابل للفهم، مثل الكتاب السابق، من الطرف القارئ الذي استوعب محتوى هذا الكتاب والذي يرغب في التخصص.

مجموعات تمارين

هناك البعض من الكُتب السابقة التي تحتوي على نصوص تمارين، وخاصة الخامس (لبير خوف وماكلان) والثالث عشر (لهوفمان وكونس) والتاسع عشر لميرسكي. أما كتاب هاس فقد أُلحقت به مجموعة من التمارين (وكذا حلولها) في اسلوب «الجبر المجرد» ونحن نوصي بها رياضي المستقبل.

1) H. HASSE, W. KLOBE, Aufgabensammlung zur Höheren Algebra, Walter de Gruyter (Sammlung Göschen), Berlin, 1952.

2) H. HASSE, W. KLOBE, Exercises to higher Algebra, F. Ungar, New York, 1954.

أهم مصدر للتمارين، متوفر حالياً، فيما يتعلق بالحسابات العملية والفعلية - نجد فيه القليل من النصوص النظرية - هي:

3) D. K. FADEEV, I.S. SOMINSKJĬ, Sbornik Zadač po vysšeĭ algebre, Fizmatgiz, Moscou, 1961.

4) D. K. FADEEV, I. S. SOMINSKII, Problems in higher Algebra, W. H. Freeman, San Francisco, 1965.

5) I. V. PROSKURJAKOV, Sbornik Zadač po lineĭnoĭ algebre, Gostekhizdat, Moscou, 1962.

يحتوي الكتاب الثالث (أو الرابع) 980 نصاً مع حلول مفصلة عندما يقتضي الأمر ذلك، وهو يُغطي تقريباً كل المواضيع التي تطرقنا لها هنا، أما

الكتاب الخامس فيضم 1753 نصاً مع الأجوبة وتوجد فيه شروح مقتضبة جداً في بعض الحالات، وهو يُغطي الجبر الخطي فقط إلاّ أنه أكثر تفصيلاً. إن مُعظم التمارين «العملية» التي نجدها في كتابنا هذا، مستقاة من هذين الكتابين (وخاصة الثاني منهما)

أما باللغة الفرنسية فإننا نجد بطبيعة الحال العديد من النصوص الخاصة بالتمارين في دروس الرياضيات الخاصة (مثلاً في لونتان وريفو Lentin et Rivaud). من جهةٍ أخرى يحتوي الكتاب التالي المخصص لطلبة الرياضيات العامة، على حوالي مئة نص في الجبر مع حلول مُفصلة:

6) G. LEFORT, Algèbre et Analyse. Exercices, Dunod, Paris, 1961.

دليل الرّموز

في ما يتعلق بالرموز التي أدخلناها في النص، نرجع القارئ إلى الفصل والفقرة حيث يظهر الرّمز لأول مرّة. أما الرّموز التي ظهرت لأول مرّة في التمارين فإننا نرجع القارىء إلى الفصل والتمرين (هذا الأخير بين قوسين) .

دليل المصطلحات

فيما يخص المصطلحات المعرفة في نص الدروس نرجع إلى الفصل والفقرة التي يظهر فيها المصطلح لأول مرة. أما فيما يخص المصطلحات المعرفة ضمن التمارين فإننا نشير إلى الفصل وإلى رقم التمرين الذي يظهر فيه لأول مرة بين قوسين.

مستحيل أو تناقص (إستدلال أو برهان بطريقة الـ)	Absurde (raisonnement par l')	0,5
قرين أو مرافق تماثل (أو تمثيل) أو مصفوفة	Adjoint d'un homomorphisme ou d'une matrice	36,3
تآلفي	Affine	
(أساس)	(base)	25,6
(إحداثيات)	(coordonnées)	25,6
(فضاء أو فراغ)	(espace)	25,2
(منوعة خطية)	(variété linéaire)	25,4
لاحقة (نقطة من المستوى العقدي)	Affixe (d'un point du plan complexe	34,(27)
جبر لأي من التماثلات الذاتية	Algèbre de Lie d'endomorphismes	34,(27)
جبري	Algébrique	
(عنصر) على حقل	(élément) sur un corps	26,2

d'un ensemble	5,2	مجموعة
(nombre)	5,2	(عدد)
Carré dans un anneau	9,1	مربّع في حلقة
Carrée		مربّعة
(matrice)	12,3	(مصفوفة)
(racine) d'un élément d'un anneau	9,1	(جذر) تربيعي لعنصر من حلقة
(racine) positive d'une matrice hermitienne positive	36,(37)	(جذر) تربيعي موجب لمصفوفة هرميتية موجبة
Cartésien (produit)	2,2	ديكارتي (جداء)
Cayley (transformation)	36,(36)	كايلي (تحويل)
Centralisateur d'une partie d'un groupe	7,11	ممركز جزء من زمرة
Centre		مركز
d'un anneau	10,(16)	حلقة
de gravité	25,3	ثقل
d'un groupe	7,(11)	زمرة
Changement de coordonnées	15,4	تغيير الإحداثيات
Chinois (théorème)	8,(9)	صينية (نظرية)
Choix (axiome du)	2,8	إختيار (مسلمة الـ)
Cinq (Lemme des)	7,(95)	خمسات (توطئة الـ)
Circulaire (permutation)	23,1	دائري (تبديل)
Circulant (déterminant)	34,(19)	دائر (معين)

du produit Cartésien d'un ensemble par lui-même 2,7	جداء ديكارتي لمجموعة في نفسها
Diagonalisable (endomorphisme ou matrice 34,6	قابلة للتأقطر (مصفوفة أو تماثل داخلي)
Différence de deux éléments relativement à une loi de composition nôtée additivement 6,2	فرق عنصرين بالنسبة لقانون تشكيل جمعي
Différentiel (opérateur) dans un anneau . . . . 30,(15)	تفاضلي (مؤثر) في حلقة
Dimension	بعد
d'un espace affine 25,6	فضاء تآلفي
d'un espace vectoriel 19,5	فضاء شعاعي
d'une variété algébrique . . 29,(6)	منوعة جبرية
d'une variété linéaire affine 25,6	منوعة خطية تآلفية
Direct (e)	مباشرة (ة)
(composé) d'anneaux 8,8	(تركيب) لحلقات
(facteur) dans un module . . 17,3	(عامل) في مقياس
(produit) de groupes 7,2	(جداء) لزمر
(produit) de modules 17,2	(جداء) لمقاييس
(somme) de sous-modules . . 17,3	(مجموع) لمقاييس جزئية
Directeur (sous-espace) d'une variété linéaire affine 25,4	توجيهي (فضاء جزئي) لمنوعة خطية تآلفية
Discriminant	مميز
d'une base d'une extension algébrique separable de degré fini . . . . 26,(4)	أساس توسيع جبري قابل للفصل ومنتهي الدرجة

d'un polynôme	33,(1)	كثير حدود
Disjoints (ensembles)	3,(1)	منفصلة (مجموعات)
Disjonction logique	0,3	فصل منطقي
Disque unité	9,(9)	قرص الوحدة
Distingué (sous-groupe)	7,3	مميزة (زمرة جزئية)
Diviseurs d'un éléments d'un anneau	7,2	قواسم عنصر من حلقة
Divisible		قابل للقسمة
(élément) d'un anneau) par un autre	7,2	(عنصر من حلقة) على عنصر آخر
(polynôme) par un autre	30,7	(كثير حدود) على آخر
Division		قسمة
euclidienne d'un entier par un autre	5,(11)	إقليدية لعدد صحيح على آخر
euclidienne d'un polynôme par un autre	32,1	إقليدية لكثير حدود على آخر
suivant les puissances croissantes	29,(8)	حسب القوى المتزايدة
Divisoriel (idéal) d'un anneau	34,(49)	قاسمي (مثالي) لحلقة
Dominant (coefficient) d'un polynôme	32,1	أساسي (معامل) لكثير حدود
Double (racine)	30,7	مضاعف أومزدوج (جذر)
Droite dans un espace affine	25,4	مستقيم في فضاء تآلفي

Formalisé (langage)	0,1	معقدة (لغة)
Formelle (série)	27,(11)	شكلية (سلسلة)
Fractions (corps des) d'un anneau intègre	29,4	كسور (حقل) حلقة تامة
Fraction rationnelle	29,5	كسر ناطق
Fractionnaire (idéal)	10,(14)	كسري (مثالي)
Gauche (module à) sur un anneau	10,1	يسار (مقياس على الـ) على حلقة
Gauss (lemme de)	27,(13)	(توطئة) غوس
Générateur (s)		مولد (ات)
d'un groupe cyclique	7,3	زمرة دورية
(ensemble de) d'un groupe	7,3	(مجموعة) زمرة
(ensemble de) d'un module	11,2	(مجموعة) مقياس
Graphe		بيان
d'une correspondance	2,(6)	اتصال
d'une fonction	2,3	تابع
d'une relation d'équivalence	4,1	علاقة تكافؤ
Groupe	7,1	زمرة
Hermitienne		هرميتية (تي)
(forme sesquilinéaire)	36,1	(شكل شبه خطي)
(matrice)	36,1	(مصفوفة)
Homogène		متجانس
(polynôme)	27,5	(كثير حدود)
(fonction polynômiale)	27,(17)	(تابع معرّف بكثير حدود)
Homomorphisme		تماثل

d'une extension quadratique	0,4	من توسيع تربيعي
Norme d'un nombre complexe	0,4	نظيم عدد عقدي
Noyau d'un homomorphisme		نواة تماثل
de groupes ou de modules	7,8	زمر أو مقاييس
d'anneaux	8,6	حلقات
Numération de base q	5,(14)	
Objet mathématique	0,1049	كائن رياضي
Opérateur de projection orthogonale	36,4	مؤثر إسقاط عمودي
Opération élémentaire sur une matrice	31,(15)	عملية أولية على مصفوفة
Opposé d'un élément relativement à une loi de composition notée additivement	6,2	نظير عنصر بالنسبة لقانون تشكيل يرمز له جمعاً
Orbites d'un groupe de transformations	7,(14)	مدارات زمرة تحويلات
Ordre		رتبة
d'un groupe fini	7,6	زمرة منتهية
d'une matrice carrée	12,3	مصفوفة مربعة
de multiplicité d'une racine d'une équation algébrique	30,7	تضاعف جذر معادلة جبرية
d'une racine de l'unité	33,(1)	جذر الوحدة
Orientation dans un espace vectoriel réel	23,5	توجيه في فضاء شعاعي حقيقي
Orthogonal (e)		متعامدة (ة)

de deux cardinaux	5,3	كردينالين
direct de groupes	7,2	مباشر لزمر
direct de modules	17,2	مباشر لمقاييس
deux idéaux d'un anneau 8,(10)		لمثالي حلقة
de		لصفوفتين
de deux matrices	14,2	
Principal		رئيسي (ة)
(anneau)	8,6	(حلقة)
(idéal) d'un anneau	8,6	(مثالي) من حلقة
Projecteur	17,4	مسقط
Projections d'un couple	2,1	
Projection orthogonale	36,4	إسقاط عمودي
Prolongement d'une application	2,5	تمديد تطبيق
Puissance		قدرة
du continu	5,5	المستمر
du dénombrable	5,5	(الـ) القابلة للعد
d'un ensemble	5,2	مجموعة
d'un élément d'un groupe	7,3	قوّة عنصر من زمرة
d'un élément relativement à une		قوة عنصر بالنسبة لقانون
loi de composition noté		تشكيل يرمز له
multiplicativement	6,1	ضرباً
Pur (nombre imaginaire)	9,3	بحت (عدد تخيلي)
Quadratique		تربيعي
(forme)	36,(1)	(شكل)
(reste) *modulo p*	9,(17)	(الباقي الـ) بترديد *p*
Quantificateurs	0,7	مكممات

انجز طبعه على مطابع

ديوان المطبوعات الجامعية

الساحة المركزية بن عكنون ـ الجزائر

دروس في الجبر
المجلد الاول والثاني
الثمن 416,00 د.ج

Codification : 1 . 01 . 759